

Série Didática

Física 3

ELETROMAGNETISMO

Cláudio Graça



Eletromagnetismo

©Cláudio Graça*

*Departamento de Física - CCNE
Universidade Federal de Santa Maria UFSM
cograça@gmail.com

6 de Novembro de 2012

©2012 by Cláudio de Oliveira Graça

Notas de aula de Eletromagnetismo, em nível introdutório, para estudantes de Engenharia e todos aqueles que tenham este tema nos seus cursos. O texto foi compilado pelo autor e é de sua responsabilidade, está sendo aperfeiçoado a cada semestre, sendo vedada a sua reprodução ou cópia sem autorização expressa do mesmo.

cograça@gmail.com.br

Imprensa Universitária da UFSM, Santa Maria-RS BRASIL.

G729e Graça, Cláudio

Eletrornagnetismo / Cláudio Graça - Santa Maria:

O Autor, 2012.

282p.:il.-(Série Didática, Física 3)

1. Física 2. Eletricidade 3. Eletromagnetismo
4. Magnetismo I. Título.

CDU: 537

Ficha catalográfica elaborada por
Marisa Severo Corrêa CRB-10/734
Biblioteca Central da UFSM

ISBN 85-90555-0-4

Prefácio

Estas notas de aula são baseadas no curso semestral de Física Geral e Experimental III lecionado para os cursos de Engenharia da Universidade Federal de Santa Maria.

A motivação principal, para escrever estas notas, foi a dificuldade de encontrar livros que se adaptassem aos objetivos da disciplina e ao mesmo tempo despertassem o interesse dos alunos.

O conteúdo é desenvolvido para atender cursos básicos de eletromagnetismo, tanto de engenharia como de física, nos quais os temas de eletrostática e magnetismo fazem a introdução gradativa às equações de Maxwell, quase de forma histórica, fazendo o estudante evoluir teoricamente com a introdução de operadores vetoriais.

As deduções matemáticas e os conceitos físicos juntam-se para formar a base conceitual capaz de fazer os estudantes adquirirem, de forma segura, os conhecimentos tecnológicos sempre em evolução, dando a oportunidade da formação, com base científica, sem a necessidade da memorização de fórmulas.

O curso de Laboratório, feito em paralelo, deverá conter tanto demonstrações de eletrostática e magnetismo como experimentos de medidas elétricas e circuitos elétricos simples.

Durante os últimos semestres vários alunos e colegas, a quem ficamos gratos, têm ajudado no aprimoramento destas notas. Aos novos leitores, agradecemos possíveis contribuições no sentido indicar incorreções, comentários ou mesmo sugestões sobre esta obra.

A impressão destas notas é feita na Imprensa Universitária da UFSM, com a valiosa colaboração de seus funcionários e estagiários.

Cláudio de Oliveira Graça

Conteúdo

1	Campo Elétrico	1
1.1	Breve Introdução Histórica	1
1.2	Carga Elétrica e Interação Elétrica	3
1.3	Condutores, Isolantes e a Eletrizacão	5
1.3.1	Eletrizacão por indução.	6
1.3.2	Eletrizacão por contato ou por fricção.	7
1.4	Lei de Coulomb	10
1.4.1	Experimento de Coulomb	12
1.4.2	Aplicação da Lei de Coulomb	13
1.5	Campo Elétrico	17
1.5.1	Linhas de Campo Elétrico	18
1.6	O Princípio da Superposiçao	19
1.6.1	Ordem de Polaridade	21
1.7	Funções distribuicão de carga	23
1.7.1	Distribuicão volumétrica	23
1.7.2	Distribuicão superficial	23
1.7.3	Distribuicão linear	23
1.7.4	Campo Elétrico devido a distribuicões contínuas	24
1.8	Aplicacões Tecnológicas da Eletrostática	36
1.9	Questões, Exercícios e Problemas	37
2	Lei de Gauss	41
2.1	Distribuicão de carga e campo elétrico	41
2.2	Conceito de Fluxo do Campo Elétrico	42
2.2.1	Fluxo Elétrico criado por Carga Puntiforme	45

2.3	Lei de Gauss	47
2.4	Aplicação da Lei de Gauss a um Condutor	54
2.5	Consequências Tecnológicas da Lei de Gauss	54
2.6	Lei de Gauss na Forma Diferencial	55
2.6.1	Equação de Poisson aplicada a uma carga pontual	57
2.7	Questões, Exercícios e Problemas	58
3	Potencial Elétrico	61
3.1	Trabalho e Energia	61
3.2	Energia Potencial Eletrostática	62
3.3	Potencial Elétrico	64
3.3.1	Superfícies Equipotenciais e Linhas de Campo	65
3.4	Cálculo do Potencial Elétrico	66
3.4.1	Potencial criado por Cargas Pontuais	66
3.4.2	Potencial criado por Cargas Distribuídas	67
3.5	Potencial em Condutores	71
3.5.1	Contato entre Condutores e Efeito das Pontas	73
3.5.2	Efeito Corona	74
3.6	Cálculo de E a partir de V	75
3.7	Forma Diferencial da Lei de Gauss	78
3.8	Expansão Multipolar	80
3.9	Aplicações Científicas e Tecnológicas	83
3.9.1	Microscópio Iônico de Campo	83
3.9.2	Transistor de Efeito de Campo	84
3.9.3	Precipitadores Eletrostáticos	85
3.10	Questões, exercícios e problemas	86
4	Capacitores e Energia Eletrostática	89
4.1	Capacitores e Capacitância	89
4.2	Cálculo da Capacitância	90
4.3	Energia no Campo Elétrico	94
4.4	Capacitores em Série e em Paralelo	95
4.4.1	Capacitores em Série	95
4.4.2	Capacitores em Paralelo	96
4.5	Capacitores com Dielétrico	97
4.5.1	Propriedades dos Dielétricos	98
4.6	Aplicações Científicas e Tecnológicas	100
4.6.1	Geradores de Alta Tensão	100
4.6.2	Capacitores de Alta Capacidade	100
4.7	Questões, Exercícios e Problemas	102

5	Corrente Elétrica	103
5.1	Lei de Ohm	103
5.1.1	Corrente Elétrica e Densidade de Corrente	104
5.2	Propriedades Elétricas dos Condutores	107
5.2.1	Efeitos da Temperatura	109
5.2.2	Corrente Elétrica e Energia Dissipada	110
5.2.3	Efeito Joule e dimensão dos Condutores	113
5.3	Modelo de Drude para a Resistividade	115
5.4	Condutores, Isolantes e Semicondutores	117
5.4.1	Condutores e Isolantes	120
5.4.2	Semicondutores Intrínsecos e Extrínsecos	121
5.4.3	Diodos Semicondutores	122
5.4.4	Supercondutores, Teoria BCS	124
5.5	Fontes de Força Eletromotriz	126
5.5.1	Baterias Ácido Chumbo	126
5.5.2	Outras fontes de fem	128
5.6	Aplicações Científicas e Tecnológicas	130
5.6.1	Chuveiros e Aquecedores com Acumulação	130
5.6.2	Efeitos Fisiológicos da Corrente Elétrica	131
5.7	Questões, Exercícios e Problemas	132
6	Campo Magnético	135
6.1	O Campo magnético	135
6.2	Cargas Elétricas em Campo Magnético	138
6.3	Forças Magnéticas sobre os Condutores	142
6.3.1	Torque sobre espiras e bobinas	144
6.4	Aplicações Científicas e Tecnológicas	146
6.4.1	Seletor de velocidades	147
6.4.2	Tubo de Raios Catódicos	148
6.4.3	Efeito Hall	148
6.4.4	Espectrômetro de Massa	150
6.4.5	Confinamento Magnético	153
6.5	Questões, Problemas e Exercícios	154
7	O Campo Magnético Gerado por Corrente Elétrica	157
7.1	Lei de Biot e Savart	157
7.2	Lei de Ampère	162
7.2.1	Campo Magnético produzido por um Condutor	163
7.2.2	Campo Magnético de um Solenoide	164
7.2.3	Campo em uma Bobina Toroidal	166
7.3	Corrente de deslocamento de Maxwell	167
7.4	Interação entre Condutores	169

7.5	Lei de Gauss para o Magnetismo	170
7.6	Aplicações Científicas e Tecnológicas	171
7.6.1	Amperímetro tipo Alicates	171
7.6.2	Fusão Nuclear Controlada	172
7.7	Questões, Problemas e Exercícios	173
8	Indução Magnética	175
8.1	Introdução	175
8.1.1	Experimentos da Indução de Faraday	176
8.2	Lei de Indução de Faraday e Lei de Lenz	177
8.2.1	Fluxo Magnético	177
8.2.2	<i>Fem</i> induzida e a Lei de Faraday	179
8.3	Estudo quantitativo da Indução	182
8.4	Auto-Indução	183
8.5	Indução Mútua	187
8.6	Aplicações Científicas e Tecnológicas	189
8.6.1	Correntes Parasitas ou Correntes de Foucault	189
8.6.2	Transformador	190
8.7	Questões Problemas e Exercícios	193
9	Propriedades Magnéticas dos Materiais	195
9.1	Introdução	195
9.2	Grandezas Magnéticas e suas Unidades	196
9.3	Caracterização de Materiais Magnéticos	198
9.3.1	Origem atômica do Magnetismo	201
9.3.2	Diamagnetismo	202
9.3.3	Paramagnetismo	206
9.3.4	Ferromagnetismo	208
9.3.5	Antiferromagnetismo e Ferrimagnetismo	211
9.4	Magnetismo Terrestre	213
9.5	Aplicações Científicas e Tecnológicas	213
9.5.1	Aplicação de Materiais Magnéticos	214
9.5.2	Conformação Mecânica com Forças Magnéticas	215
9.5.3	Ressonância Magnética Nuclear	216
9.6	Questões, Problemas e Exercícios	217
10	Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas	219
10.1	Introdução	219
10.1.1	Equações de Maxwell na forma Integral	220
10.1.2	Equações de Maxwell na forma diferencial	221
10.2	Propagação de Campos e Ondas EM	224
10.2.1	Ondas Eletromagnéticas	225

10.2.2	Dedução das Equações de Onda para \vec{E} e \vec{B}	227
10.3	Transporte de Energia e Momento	230
10.3.1	Pressão da Radiação	231
10.3.2	A Conservação da Carga Elétrica	233
10.3.3	Vetor de Poynting e Transporte de Energia	233
10.3.4	Radiação de Dipolos Oscilantes	235
10.4	Propriedades da Radiação Eletromagnética	238
10.4.1	Dispersão de Ondas Eletromagnéticas	238
10.4.2	Polarização	239
10.4.3	Espectro de Radiação Eletromagnética	240
10.5	Aplicações Científicas e tecnológicas	243
10.5.1	Blindagem Eletromagnética	243
10.5.2	Experimento de Hertz	244
10.5.3	Efeitos da Exposição a Campos Eletromagnéticos	244
10.6	Questões, Exercícios e Problemas	249
11	Circuitos Elétricos de Corrente Contínua	251
11.1	Introdução	251
11.2	Solução de Circuitos CC	252
11.2.1	Circuitos Equivalentes	253
11.2.2	Regras de Kirchhoff.	257
11.3	Circuito RC: carga e descarga do capacitor	264
11.3.1	Conservação da energia no circuito RC	267
11.4	Circuito RL: crescimento e decaimento da corrente	268
11.5	Circuito LC	274
11.6	Circuito RLC sem fonte	277
11.7	Questões, Exercícios e Problemas	282
12	Medidas Elétricas	285
12.1	Introdução	285
12.2	Galvanômetro d'Arsonval	286
12.3	Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros	287
12.3.1	Amperímetro	287
12.3.2	Voltímetro	288
12.3.3	Ohmímetro	289
12.4	Aplicações Científicas e Tecnológicas	291
12.4.1	Instrumentos digitais	291
12.5	Questões, Exercícios e Problemas	293
A	Análise Vetorial	295
A.1	Vetores	295
A.2	Operadores Vetoriais	296

B	Análise de Campos Escalares e Campos Vetoriais	299
B.1	Diferenciação de Campos Escalares e Vetoriais	299
B.2	Integração de Campos Escalares e Vetoriais	301
C	Regra de Cramer	303
D	Unidades e Constantes	305
E	Consumo de Energia Elétrica	307
F	Bibliografia	309
F.1	Bibliografia Indicada	309
F.2	Obras de Grande Interesse Histórico	310
F.3	Estudo Avançado	310
F.4	Multimídia	310

CAPÍTULO 1

Campo Elétrico

Em 1751 Benjamin Franklin publicou a obra "Experiências e Observações sobre a Eletricidade, Realizadas na Filadélfia". Além de estudioso da eletrostática, foi jornalista, político e um dos autores da constituição americana...

1.1 Breve Introdução Histórica

Tanto a eletricidade como o magnetismo são fenômenos naturais com os quais a humanidade sempre esteve em contato. Existe, inclusive, uma teoria científica que trata das descargas elétricas atmosféricas como responsáveis pela origem da vida na Terra. A primeira descrição dos fenômenos elétricos e magnéticos é em geral atribuída a Tales de Mileto¹. Essa descrição incluía a eletrização por atrito do *âmbar*² e a atração magnética produzida por ímãs NATURAIS, como a magnetita³. Pode-se dizer então que o termo eletromagnetismo provém desses dois nomes gregos, o *elektron* e a *magnetita*. Não se pode esquecer que muitos autores se referem também ao uso de bússolas pelos chineses em tempos remotos.

¹Tales de Mileto, (cerca de 625-558 AC), matemático e filósofo grego nascido em Mileto, na Grécia antiga.

²Resina fóssil de cor amarelada, que em grego era chamado de elektron.

³Magnetita é um minério natural de ferro o Fe_3O_4 , proveniente da região de Magnés na Asia Ocidental.

A primeira bússola chinesa surge no período dos Reinos Combatentes (475 a 221 AC) chamando-se, então, "Sinan", que poderia ser traduzido como "Indicador do Sul". A produção de ímãs artificiais, atritando agulhas de ferro com magnetita, permitiu a construção de uma bússola mais sofisticada, já na época da dinastia Song, no século XI, época em que os chineses entraram em contato com os árabes que a introduziram na Europa.

As experiências na Europa e nos EUA com eletricidade e magnetismo, se desenvolveram principalmente durante os séculos XVIII e XIX e levaram a um conhecimento profundo dos fundamentos do eletromagnetismo. Deve-se destacar o estudo pioneiro do magnetismo feito por William Gilbert (1600) que descreveu o uso da bússola para o mapeamento do campo magnético em seu livro "De Magnete". Com a invenção da pilha voltaica feita por Alessandro Volta (1800) tornou-se possível o uso, controlado, de correntes elétricas. Isso permitiu a Hans Christian Oersted (1820) perceber a interação da corrente elétrica com o campo magnético de uma bússola. Estabelece-se, dessa maneira e pela primeira vez, a relação entre eletricidade e magnetismo. Este estudo foi ampliado por André Marie Ampère (1820) verificando a interação magnética entre condutores percorridos por correntes. Os inúmeros experimentos de indução de Michael Faraday finalmente permitiram a James Clerk Maxwell (1865) sintetizar todo o conhecimento de Eletricidade e Magnetismo em quatro leis, hoje conhecidas como as equações fundamentais do eletromagnetismo que permitiram descrever a luz como ondas eletromagnéticas, fato comprovado por Heinrich Hertz (1888).

O eletromagnetismo pode, então, ser sintetizado por quatro equações, as chamadas Equações de Maxwell, originalmente conhecidas como as leis de Gauss, Faraday e Ampère. A teoria de Maxwell do Eletromagnetismo é considerada, na Física, como uma das teorias mais sucintas e bem acabadas. Elas resumem, em apenas quatro equações, uma quantidade impressionante de conhecimentos, acumulados ao longo da história, sobre os fenômenos elétricos e magnéticos, que resultaram em avanços científicos e tecnológicos que alteraram a forma de viver da humanidade. Resta lembrar que adicionando-se a teoria de Einstein da Relatividade ao eletromagnetismo de Maxwell tem-se uma teoria mais completa de como, no movimento de cargas, se relacionam as forças elétricas e magnéticas. Da mesma forma, em vez de iniciar pelas leis de Maxwell, poder-se-ia, hoje, partir das teorias de calibre (gauge) que também conduzem às leis de Maxwell de uma forma muito elegante.

Nessas notas preferimos seguir a ordem, quase histórica, das leis que deram origem à teoria de Maxwell. Deixamos para os colegas mais jovens a tarefa de introduzir, no futuro muito próximo, tanto nos cursos de Física como nos de Engenharia, a partir já do primeiro ano, o estudo de campos e sua quantização.

1.2 Carga Elétrica e Interação Elétrica

A melhor forma de introduzir o eletromagnetismo é lembrar que a entidade fundamental responsável tanto pelos fenômenos elétricos como magnéticos é a carga elétrica. A carga elétrica é uma propriedade fundamental associada às partículas que constituem a matéria. A carga elétrica elementar "e" está associada tanto aos elétrons como aos prótons, com um mesmo valor que pode ser positivo ou negativo. Estas são as partículas mais conhecidas que constituem o átomo, mas existem outras como o pósitron, o muon e o pion que também possuem carga na mesma quantidade elementar ou múltiplos desta.

O mundo das partículas elementares é formado por muitas espécies de partículas mas se acredita, hoje, que os constituintes fundamentais da matéria formam duas famílias: os léptons e os quarks. À família dos léptons pertencem os elétrons e os neutrinos. Os quarks são os blocos fundamentais dos prótons e nêutrons. Parecem ser estes os blocos fundamentais, dos quais se constituem todas as demais partículas, por serem consideradas indivisíveis, tanto quarks como leptons. Os prótons e os nêutrons são formados por três quarks. Aos quarks se atribuem cargas elétricas fracionárias que podem tomar valores $1/3$ e $2/3$ de e . Como os quarks não existem livres na natureza a sua existência é restrita ao núcleo atômico, no estudo da eletricidade e do magnetismo atômico não havendo necessidade de incluir esse fracionamento de carga, permanece a carga elétrica elementar como a carga do elétron, positiva ou negativa, conforme o tipo de partícula portadora de carga.

A designação da carga elétrica como positiva ou negativa é arbitrária e anterior ao conhecimento da estrutura do átomo em termos de elétrons, prótons e nêutrons. A rigor tanto prótons como elétrons, para os fenômenos eletromagnéticos, são partículas elementares e portanto a carga elétrica goza de duas propriedades importantes:

1. **Conservação de carga:** a carga elétrica é uma propriedade inerente à partícula que a carrega, que se pode chamar portador de carga. Portanto, não é possível criar ou destruir a carga elétrica. Mesmo que, em uma colisão de alta energia, a partícula portadora seja destruída as partículas resultantes dessa reação carregaram a mesma quantidade de carga inicial. Um dos exemplos mais interessantes é a aniquilação de um pósitron por um elétron formando um fóton gama sem carga. Como se pode observar, a carga antes e depois da aniquilação é nula:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma.$$

Um outro exemplo interessante é o decaimento dos nêutrons no núcleo que se transformam espontaneamente em um próton e um elétron mais

um neutrino,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Em ambas as reações a carga total antes e após a reação é a mesma, podendo-se dizer que ocorre a conservação de carga. A conservação de uma grandeza física está sempre associada a uma simetria da natureza. Portanto, a conservação da carga está ligada a um princípio fundamental, que pode ser expresso da seguinte maneira: a soma algébrica de todas as cargas de um sistema isolado nunca se altera.

2. **Quantização da carga:** qualquer carga sendo positiva ou negativa se apresenta sempre como um múltiplo da carga do elétron, ($e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$). Como consequência, quando uma quantidade de carga “ q ” é transferida, pode-se dizer que um certo número “ n ” de partículas elementares com cargas de valor fixo e , foi transportada tal que $q = ne$. No **modelo padrão**, para o núcleo atômico, as partículas portadoras de carga elétrica são os quarks, que podem possuir cargas cujo valor pode ser de $\frac{1}{3}e$ ou de $\frac{2}{3}$, tanto positivo como negativo. É preciso lembrar que essa quantização é restrita ao núcleo atômico, pois nunca se observaram quarks livres. No estudo do eletromagnetismo clássico, muitas vezes, a quantização de carga elétrica é esquecida e se considera que um corpo eletrizado possa ter qualquer quantidade de carga elétrica. Nesse caso a carga elétrica é tratada como se fosse um fluido contínuo, como se pensava antes do século XX, mas deve-se lembrar, sempre, que a carga elétrica é transferida em pacotes de carga portanto qualquer carga é sempre um múltiplo inteiro de e , seja ela positiva ou negativa. O elétron tem sempre carga e^- e o próton e^+ .

A carga elétrica q é uma propriedade fundamental que não pode ser expressa em termos de outras grandezas físicas e que está sempre associada a uma partícula, como o elétron e o próton. Eventualmente consideramos que um corpo possui uma carga elétrica, sem lembrar das partículas. Tanto entre partículas como entre corpos com carga ocorre a chamada **interação eletromagnética** e essa interação é diferente tanto da interação gravitacional como da interação nuclear.

A interpretação das forças eletrostáticas entre cargas pode ser feita de duas maneiras: na primeira aplica-se a lei de Coulomb, e instantaneamente cada uma das partículas ou elementos com carga sentirá a presença da resultante das forças de interação com as demais cargas; na segunda cada carga, modifica as propriedades do espaço ao seu redor produzindo um **campo elétrico**, que interage com partículas, ou com outros campos do mesmo tipo, propagando-se no meio com a velocidade da luz. Essas são as duas maneiras que se utilizam para estudar o que se chama interação elétrica.

Do ponto de vista do cálculo das interações, aplica-se o lei de Coulomb, tanto a partículas pontuais como a distribuições contínuas de carga, bastando para isso dividir a carga em elementos de linha, superfície ou volume. Em vez de se falar em interação entre partículas com carga elétrica que atuam à distância através de forças, do tipo Newton-Coulomb, pode-se falar em campos, do tipo gravitacional ou eletromagnético, definidos em uma região do espaço onde se pode sentir a influência das partículas com massa ou com carga elétrica, conforme seja o campo, gravitacional ou eletromagnético.

1.3 Condutores, Isolantes e a Eletrização

As propriedades elétricas dos materiais permitem classificá-los, de forma simples, em condutores e isolantes. Assim como existem bons e maus condutores existem bons e maus isolantes. Contudo, a diferença de condutividade entre qualquer condutor e qualquer isolante é tão grande que não haverá dúvida nessa classificação.

A eletrização de um corpo, condutor ou isolante, pode ser feita por indução ou por fricção. Nos dois processos pode-se entender a eletrização como consequência da ação de um campo elétrico que produz a separação do centro de cargas elétricas como se demonstra na figura 1.1. Esses dois processos são os métodos de eletrização mais conhecidos e utilizados e resumem todos os processos de eletrização.

A eletrização por condução se dá quando friccionamos entre si dois materiais isolantes (ou condutores isolados) inicialmente descarregados, ou quando tocamos um material isolante (ou condutor isolado) inicialmente descarregado com outro carregado.

A aproximação, sem contato, de um corpo com carga, ou de um campo elétrico a um corpo eletricamente neutro, condutor ou isolante, provocará uma separação de cargas, neste corpo que continua neutro da mesma forma como aquela apresentada na Fig.1.1. Esse processo é chamado de indução.

Nos condutores o mecanismo de captura e liberação de elétrons é muito fácil, pois os mesmos possuem elétrons livres, cuja energia de ligação é muito pequena. Dessa maneira um corpo condutor não conserva qualquer excesso de carga, positiva ou negativa (como resultado da falta ou excesso de elétrons) por muito tempo, tendendo a atingir rapidamente o equilíbrio eletrostático. A carga elétrica, por sua grande mobilidade, se separa formando a eletrização por separação de cargas, como se fosse um efeito de distribuição de carga superficial, resultando na anulação do campo elétrico no interior do condutor. Os condutores são formados por átomos com um, dois ou três elétrons de valência que formam a camada de elétrons denominada banda de condução onde a energia de ligação é muito pequena, com elétrons são quase livres,

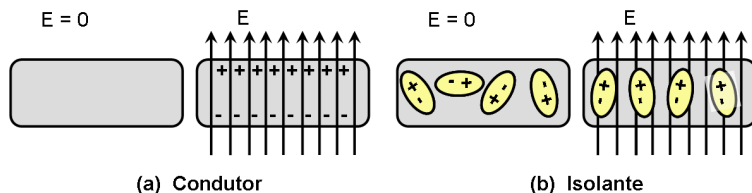


Figura 1.1: Eletrização de condutores e isolantes sem carga, sob a ação de um campo externo. (a) condutor, com formação de carga superficial; (b) isolante, onde a eletrização é localizada.

permitindo a sua grande mobilidade entre átomos vizinhos.

Os isolantes são formados por átomos cuja camada de valência é completa ou quase completa, com seis, sete ou oito elétrons, formando materiais, cujos elétrons estão muito ligados e só podem ser arrancados por energias muito altas. Como não existem elétrons quase livres, como nos condutores, ao mover um elétron o equilíbrio eletrostático leva muito mais tempo para ser atingido do que nos condutores. A carga elétrica em excesso ou faltante, é localizada. Essa separação local de cargas, ocorre pela polarização que produz a eletrização como um efeito de volume, no local do atrito ou do contato. Este processo de polarização de isolantes será estudado no capítulo de capacitores, onde o processo de polarização de dielétricos é muito importante.

1.3.1 Eletrização por indução.

A forma mais efetiva de eletrização é feita por indução, permitindo a eletrização de um condutor isolado, como nos mostram as Fig. 1.2. O processo se inicia com a separação de cargas de um corpo neutro, na presença de um campo elétrico produzido, por exemplo, por um bastão carregado. A carga de um dado sinal pode ser transferida para a Terra, permanecendo, como na Fig. 1.2 o corpo eletrizado.

Existem muitos equipamentos nos quais as cargas são produzidas por indução, mas o mais famoso e histórico é o eletróforo, desenvolvido por Johannes Wilcke e Alessandro Volta no século XVIII. O eletróforo consiste de um capacitor com duas placas uma metálica e outra isolante onde a carga obtida por fricção da placa isolante é transferida por indução à placa metálica, utilizando o mesmo princípio mostrado na Fig. 1.2, permitindo, dessa maneira, obter potenciais muito altos pela repetição do processo de eletrização aproximando a placa isolante da metálica repetidamente.

A eletrização por indução de corpos isolantes também se verifica mas com menor intensidade pois os elétrons não se movimentam como nos condu-

tores mas há, em cada molécula, uma pequena separação entre as cargas positivas e negativas conforme se observa na Fig. 1.1(b) denominada polarização. Verifica-se que também neste caso o efeito resultante é de uma atração entre os corpos. Um exemplo dessa situação é a experiência em que passamos no cabelo um pente de plástico o qual em seguida é capaz de atrair pequenos pedaços de papel. Pelo atrito com o cabelo, o pente ficou eletrizado e assim é capaz de atrair o papel embora este esteja neutro.

Foram experiências muito simples as que originarão o estudo da eletricidade. Na Grécia antiga, aproximadamente em 600 AC, o filósofo grego Tales observou que o âmbar, (a palavra grega para o âmbar é elektron), resina fossilizada, muito bom isolante, após ser atritado com outros materiais era capaz de atrair pequenos pedaços de palha ou fios de linha sem os tocar, ou seja por indução.

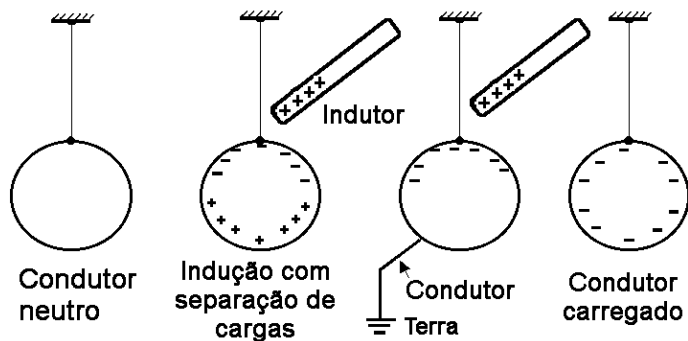


Figura 1.2: Eletrização por indução em corpos metálicos, produzindo corpos carregados com cargas de sinais opostos.

1.3.2 Eletrização por contato ou por fricção.

A teoria da eletrização por contato é baseada nos estudos de Alexandre Volta que descobriu que quando dois condutores (metais) diferentes entram em contato surge uma pequena diferença de potencial entre ambos, denominada potencial de contato. Através do estudo da física quântica é fácil entender porque essa diferença de potencial é uma propriedade da junção dos dois materiais e da temperatura da mesma. A diferença de potencial que se estabelece entre dois materiais em contato está relacionada com o potencial químico de cada um dos materiais. Quando dois materiais são colocados em contato as cargas elétricas, elétrons no caso dos metais, fluem de um lado para o outro até que o equilíbrio eletrostático seja atingido. Dessa maneira é

possível dizer que o potencial de contato depende da concentração de elétrons nos dois lados do contato e da energia potencial média, ou função trabalho, dos elétrons de condução em cada um dos metais. Foi o mesmo Alexandre Volta que, pela primeira vez, construiu uma sequência ordenada de metais, que mais tarde foi ampliada. Cada um desses metais era caracterizado por uma quantidade denominada valor galvânico, que determinava a sua posição na série. Hoje, utilizando a teoria de Fermi para os níveis de energia dos metais, é possível ordenar todos os materiais sejam condutores isolantes ou semi-condutores, utilizando a energia potencial dos elétrons. Alguns materiais, quando friccionados aos pares (um contra o outro), geram mais cargas elétricas livres do que outros pares. Uma vez que a eletrização de um corpo nada mais é que a quantidade de partículas carregadas em excesso oriundas do processo do atrito, sejam eles isolantes ou condutores isolados, é de se entender que existem certos materiais que têm maior tendência de fornecer elétrons tornando-se positivamente eletrizados ou de receber elétrons tornando-se negativamente eletrizados do que outros.

o processo de eletrização por atrito, também pode ser entendido através da teoria de Fermi pois, durante o processo, a variação da temperatura modifica a distribuição da energia dos elétrons permitindo entender a eletrização por fricção como um processo no qual o potencial de contato se altera pelo aquecimento produzido pela fricção.

Para entender o processo de eletrização e verificar qual corpo se torna positivo ou negativo durante o processo de atrito, é necessário classificar os materiais, condutores, isolantes e semicondutores sequência ordenada denominada **série triboelétrica**.

Série Triboelétrica

Os estudos experimentais de Benjamim Franklin, sobre a produção de carga elétrica por atrito de diferentes materiais, condutores e isolantes, seguindo a convenção de sinais de carga, proposta pelo próprio Franklin, mostraram que, quando se fricciona o vidro com seda, alguns elétrons passam do vidro para a seda, ficando o vidro positivo. Já quando se fricciona o âmbar com pele de coelho ou mesmo com seda o âmbar fica negativo, pois ocorre a transferência de elétrons para o âmbar.

Ampliando este tipo de estudo para outros materiais, pode-se estabelecer uma série ordenada de materiais, de acordo com a tabela 1.1, que constituem uma série triboelétrica (tribos do grego, significando atrito). Nessa tabela se verifica que o âmbar se encontra abaixo da seda e da pele de coelho, ou seja, a sua eletrização será negativa, enquanto que o vidro se encontra acima da seda e, portanto, se torna positivo quando friccionado por ela. Seria interessante investigar a função trabalho (energia média necessária para

arrancar um elétron) desses materiais, pois, seguramente, eles estarão ordenados em forma decrescente desse parâmetro. A função trabalho mede a energia média necessária para arrancar um elétron do material, portanto materiais com maior função trabalho tenderão a arrancar elétrons dos de menor função trabalho.

Tabela 1.1: Série Triboelétrica

+Positivos (menor função trabalho)
amianto pele de Coelho vidro nylon lã chumbo seda alumínio papel algodão aço madeira âmbar níquel, cobre borracha estanho, prata borracha sintética polietileno PVC teflon borracha de silicone
-Negativos (maior função trabalho)

A utilização da série triboelétrica⁴ pode apresentar alguns problemas, pois a função trabalho pode ser alterada tanto por contaminação dos materiais como pelo tratamento superficial dos mesmos. O espaçamento, entre os materiais dentro da série, não permite prever o valor da carga elétrica produzida, pois existem muitos fatores além da função trabalho, como o acabamento

⁴<http://www.ece.rochester.edu:8080/~jones/demos/charging.html>,
23/03/2007.

acesso:

superficial, a condutividade elétrica e as propriedades mecânicas, que influenciam os resultados; no entanto, o seu uso permite prever o comportamento da eletrização dos materiais de forma qualitativa.

A partir do início século XX o conhecimento da constituição interna do átomo teve um desenvolvimento muito grande e a constituição de átomo por um núcleo muito pequeno e de carga elétrica positiva e uma camada de elétrons de mesma carga ao seu redor, permitiu mostrar que o fato de um corpo ter carga positiva ou negativa significa que o mesmo possui um número em excesso de elétrons ou é positivo quando tem falta de elétrons. Por outro lado, a força elétrica é a responsável pela estrutura dos átomos que, associada à chamada mecânica quântica permite entender a existência da estabilidade atômica, apesar da carga elétrica entre o núcleo e os elétrons ser puramente atrativa.

1.4 Lei de Coulomb

Dentre as experiências no estudo das interações elétricas, foram as realizadas por Benjamin Franklin e Joseph Priestley aquelas que mais se destacaram. Todos esses experimentos foram feitos em uma época em que a detecção da carga elétrica era muito precária, utilizando-se eletroscópios rudimentares e mesmo assim, Charles Augustin Coulomb (1736-1806) pôde construir uma balança de torção que comprova com precisão as propriedades das forças elétricas cujos resultados podem ser resumidos pela Lei de Coulomb: as forças elétricas, entre duas cargas uniformemente distribuídas sobre corpos esféricos, **têm a mesma direção da linha que une o centro das cargas**, sendo repulsivas se as cargas tiverem o mesmo sinal e atrativas para cargas de sinais opostos. **O módulo das forças é, por sua vez, diretamente proporcional ao produto dos módulos das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.**

A Lei de Coulomb pode ser expressa para a força de interação elétrica entre duas cargas pontuais, quaisquer, q_i e q_j situadas a uma distância r_{ij} por

$$\vec{F}_{ij} = k \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}, \quad (1.1)$$

na qual $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

A constante de proporcionalidade k chamada constante de Coulomb e ϵ_0 a permissividade do vácuo foram obtidas, originalmente, utilizando-se a balança de Coulomb. A balança de Coulomb foi construída como uma balança, muito semelhante à balança de Cavendish, usada para estudar a validade da lei de Newton da gravitação. A balança de Coulomb, cujo esquema é mostrado na Fig. 1.3, possui uma fibra de torção suspensa em um micrômetro,

sustentando um braço transversal no qual existem duas esferas de igual massa, permitindo o equilíbrio horizontal do braço. Um braço rígido suporta uma esfera fixa. Eletrizando essa esfera fixa, as duas esferas ficam eletrizadas com o mesmo tipo de carga. A esfera móvel se afastará, produzindo uma torção do fio. Ao diminuir gradativamente, o ângulo, de torção utilizando o micrômetro se pode verificar experimentalmente a função $1/r^2$.

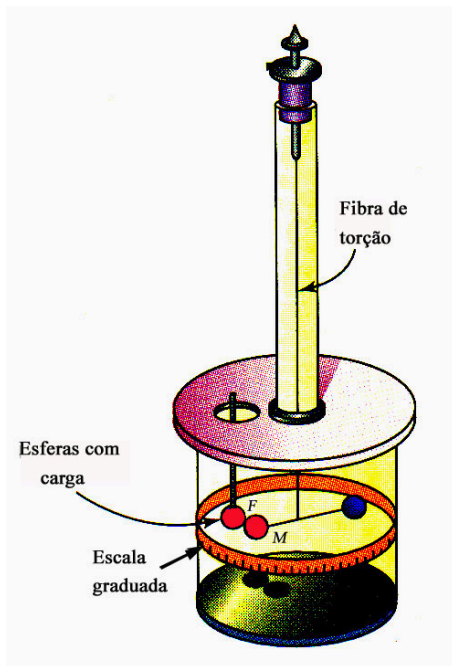


Figura 1.3: Balança de torção de Coulomb, composta de uma fibra de torção, um braço em equilíbrio e duas esferas de carga, uma móvel (M) e outra fixa (F) sobre o braço que gira. O ângulo de rotação poderá ser medido sobre uma escala graduada.

A medida da força de Coulomb, pode ser feita utilizando a balança de Coulomb, Fig. 1.3, na condição de equilíbrio entre o torque produzido pela força de repulsão ou de atração eletrostática F_c e o torque mecânico de reação produzido pela rotação da fibra de torção, de constante elástica σ ,

$$F_c \cdot b = \sigma \theta, \quad (1.2)$$

onde, b é o braço que sustenta a esfera móvel e θ o ângulo de rotação do mesmo.

A verificação experimental da Lei de Coulomb despertou muito interesse para investigação da dependência da força com o inverso do quadrado da distância. Qual a razão para o expoente de r ser exatamente 2?

A primeira constatação de que a interação entre duas cargas elétricas obedece à lei de força

$$F \propto \frac{1}{r^2},$$

na qual r é a distância entre os centros das cargas e F é o módulo da força, foi feita por Priestley em 1766, observando que um recipiente metálico carregado eletricamente, não possui cargas na superfície interna e não exerce forças sobre uma carga colocada no seu interior. A partir deste fato experimental, deduziu matematicamente a validade a lei do inverso do quadrado da distância de forma análoga à dedução feita para a gravitação.

Medidas diretas da força de interação elétrica em função da distância foram realizadas em 1785 por Coulomb utilizando um aparato denominado balança de torção. Foram sucessivamente sendo feitas medidas podendo-se comprovar, com a construção de equipamentos cada vez mais modernos até que 1971 pode-se comprovar, supondo que a lei de interação fosse dada por,

$$F \propto \frac{1}{r^{(2+\epsilon)}},$$

que a incerteza ϵ no expoente vale, $|\epsilon| < 3 \times 10^{-16}$ e dessa maneira confirma-se a lei do inverso do quadrado da distância.

1.4.1 Experimento de Coulomb

A lei de Coulomb descreve a força entre dois pequenos corpos esféricos, como sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros dos dois corpos. Para demonstrar esta lei, Coulomb desenvolveu um experimento utilizando uma balança de torção como a da Fig. 1.3. Considerando que os dois corpos tenham as mesmas dimensões, massas e cargas, teremos a repulsão elétrica dada pela equação

$$F_c = C_1/d^2$$

Na qual F_c é a força elétrica, d a distância entre os dois corpos e C_1 uma constante que depende da carga e de outras constantes naturais.

A demonstração feita por Coulomb provando esse tipo de comportamento, conforme a geometria da Fig. 1.4 iniciou por vários experimentos com a balança de torção nos quais Coulomb encontrou a lei que governa a torção

para fibras muito finas, sensíveis o suficiente para demonstrar a relação essa relação; A força de torção obtida por ele é proporcional ao ângulo de torção:

$$F_\tau = C_2\theta$$

Na qual a constante $C_2 = \frac{\mu\theta D^4}{L}$ em que μ é a constante característica de uma determinada fibra, θ o ângulo de torção, D o diâmetro da fibra e L o seu comprimento.

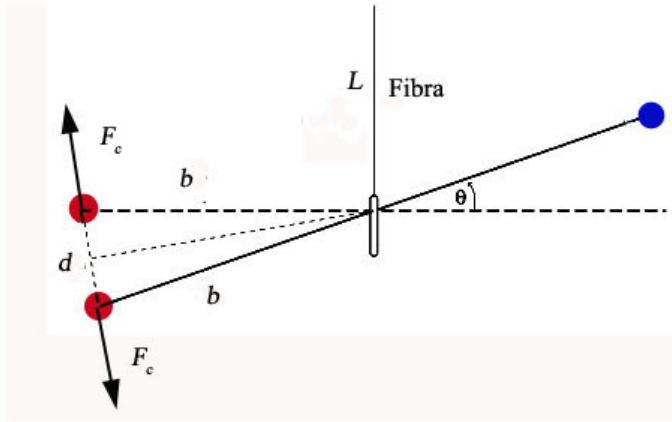


Figura 1.4: Geometria da balança de torção sobre repulsão eletrostática.

No experimento para chegar à Lei de Coulomb, essas duas forças atingem o equilíbrio permitindo observar a partir dos valores das constantes C_1 , e C_2 a relação entre d e a medida do ângulo θ , sobre a escala graduada, pois:

$$C_1/d^2 = C_2\theta$$

, Portanto

$$\frac{1}{d^2} = \frac{C_2}{C_1}\theta$$

Os vários resultados experimentais resultaram em comunicações feitas por Coulomb à Academie royale des sciences, entre 1784 e 1793⁵, nas quais ele apresenta os resultados do desenvolvimento experimental da balança de torção.

1.4.2 Aplicação da Lei de Coulomb

A força entre cargas elétricas pontuais pode ser exemplificada pelo exemplo indicado na Fig. 1.5,

⁵Institut de France, Academie des sciences, Paris, Fr

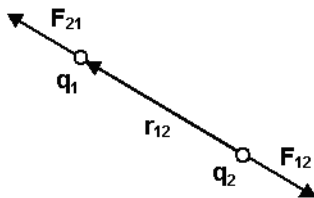


Figura 1.5: Interação entre duas cargas elétricas.

que permite analisar a Lei de Coulomb na sua forma vetorial, quando as duas cargas tiverem o mesmo sinal ou sinais contrários, na mesma geometria da balança de torção da Fig. 1.3,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}. \quad (1.3)$$

Este problema sugere que é mais interessante utilizar a forma escalar da lei de Coulomb escolhendo-se a direção das forças, sem a preocupação do sinal das cargas. Para a aplicação da lei de Coulomb a um conjunto de cargas elétricas, aplica-se o princípio da superposição a um sistema de partículas que em princípio é considerado como estático.

Pode-se utilizar o sistema material mais simples, o átomo de hidrogênio, para comparar as forças elétricas e gravitacionais. A atração gravitacional entre um próton e um elétron a uma distância igual ao raio de Bohr vale:

$$F_g = G \frac{m_H m_e}{r^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{1,67 \times 10^{-27} \times 9,109 \times 10^{-31}}{(5,3 \times 10^{-11})^2} \simeq 3,6 \times 10^{-47} N,$$

em que $r_B = 5,3 \times 10^{-11} m$, enquanto que a atração elétrica entre as duas partículas é dada por

$$F_e = k \frac{q_H q_e}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1,602 \times 10^{-19})^2}{(5,3 \times 10^{-11})^2} \simeq 8,2 \times 10^{-8} N.$$

Estes valores indicam, portanto, uma relação em que, neste caso, as forças elétricas são da ordem de 10^{39} maiores do que as gravitacionais, o que demonstra a sua importância para a formação da matéria. Neste ponto é muito importante ressaltar que as forças elétricas são as responsáveis principais pela estrutura atômica e molecular, dando este caráter da condensação da matéria, levando, por exemplo, à rigidez dos sólidos.

Exemplo 1.1

Supondo duas cargas pontuais q_1 e q_2 localizadas, a uma distância d uma da outras e fixas no eixo x . Colocando uma terceira carga q_3 , em uma posição x qualquer, verifica-se que a mesma permanece em repouso em relação às duas primeiras. Em que condições este equilíbrio de forças pode ocorrer?

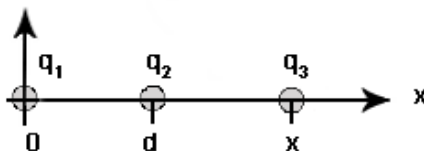
Solução

Figura 1.6: Disposição das cargas para o exemplo 1.1.

Na Fig. 1.6, observa-se a localização inicial destas cargas. O equilíbrio das cargas fixas é independente da solução deste problema, portanto não será analisado, restando a análise do equilíbrio da terceira carga que apenas não se move porque foi abandonada na posição, na qual a resultante das forças sobre a mesma é nula. Escolhe-se o eixo dos x para localizar as três cargas. A resultante das forças sobre a carga 3 é dada por:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}.$$

Utilizando a Lei de Coulomb, pode-se obter as duas forças

$$\vec{F}_{13} = k \frac{q_1 q_3}{x^2} \hat{i},$$

e

$$\vec{F}_{23} = k \frac{q_2 q_3}{(x - d)^2} \hat{i}.$$

Para que a resultante seja nula, resulta a seguinte condição:

$$q_1(x - d)^2 = x^2 q_2.$$

Esta condição nos mostra que a solução só poderá ser atingida para o caso das duas cargas fixas q_1 e q_2 tiverem sinais opostos. A posição da terceira carga poderá ser obtida, resultando em

$$x = \frac{d}{1 - \sqrt{-\frac{q_2}{q_1}}}.$$

A solução de equilíbrio, à direita ou à esquerda da origem, depende da relação entre os módulos das duas cargas fixas. Supondo que $|q_2| < |q_1|$, a posição de equilíbrio será positiva, como a escolhida na Fig. 1.6.

Resta a discussão sobre a posição de equilíbrio ser estável ou instável. Para isso, basta calcular o valor da força para uma posição um pouco maior ou menor do que a posição x , ou seja introduzir uma perturbação na posição da carga, onde ocorre o equilíbrio. Se a força resultante tiver direção oposta ao ponto de equilíbrio nos dois casos, o equilíbrio é estável. De uma forma geral, o **Teorema de Earnshaw**, diz que **nenhum corpo pode estar em equilíbrio estável se sobre ele só atuarem forças eletrostáticas**. O tema do equilíbrio de cargas elétricas é muito importante e voltará a ser discutido no capítulo de potencial elétrico utilizando o cálculo diferencial.

Exemplo 1.2

Considerando três partículas de cargas $q_1 = 1C$, $q_2 = -2C$ e $q_3 = 3C$, localizadas nos vértices de um triângulo retângulo cujos lados valem $a = 1m$ e $b = 1m$, como é mostrado na Fig. 1.7, calcule a força resultante sobre a partícula de carga negativa.

Solução

Os módulos das forças que atuam sobre a carga negativa são

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{b^2}; \quad F_{32} = k \frac{q_2 q_3}{a^2}.$$

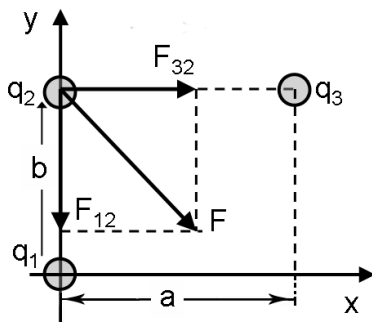


Figura 1.7: Disposição de três cargas nos vértices de um triângulo retângulo para o exemplo 1.2.

A resultante dessas forças pode ser escrita na forma cartesiana,

$$\vec{F} = \vec{F}_{32} + \vec{F}_{12} = k \frac{q_2 q_3}{a^2} \hat{i} - k \frac{q_1 q_2}{b^2} \hat{j} \text{ N.}$$

Substituindo os valores numéricos, do problema, resulta em

$$\vec{F} = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 3}{1^2} \hat{i} - 9 \times 10^9 \frac{1 \times 2}{1^2} \hat{j} = 5,4 \times 10^{10} \hat{i} - 1,8 \times 10^{10} \hat{j},$$

cujos módulos serão dados por

$$|\vec{F}| = 5,69 \times 10^{10} N.$$

1.5 Campo Elétrico

As cargas elétricas modificam o espaço ao seu redor produzindo um campo vetorial denominado campo elétrico. O campo elétrico, em qualquer ponto desse espaço, é um vetor \vec{E} que pode ser medido utilizando uma carga de prova q_o colocada nesse ponto, sentindo a força que atua sobre ela. Por convenção, essa carga deve ser positiva e muito pequena. Do ponto de vista matemático, pode parecer que as forças eletrostáticas podem ser calculadas sem essa noção de campo mas com a evolução da física esse conceito acabou por dominar e hoje as interações são sempre definidas em termos do campo de forças. Dessa maneira ocorreu a evolução da noção de ação à distância para a de campo que se propaga com uma velocidade característica do campo e do meio e isto se deve ao fato de que o efeito da força à distância não é instantâneo. A propagação do campo elétrico ocorre com a velocidade da luz. Um exemplo prático, muito interessante é a propagação das perturbações eletromagnéticas que ocorrem no Sol e só são sentidas na Terra vários minutos depois.

O campo elétrico, em um dado ponto do espaço, pode ser definido como:

$$\vec{E} = \lim_{q_o \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{q_o} \right), \quad (1.4)$$

onde q_o é uma carga de prova, tão pequena quanto se queira. Mesmo sabendo que q_o não pode tender a zero, pois a carga é quantizada ou seja tem um limite físico, que é a carga de um elétron. Contudo nos problemas macroscópicos as cargas sempre podem ser tratadas como se fossem uma distribuição contínua da função densidade de carga.

O espaço vetorial que representa o campo elétrico pode ser interpretado a partir da interação entre partículas e ao colocar uma carga elétrica no espaço que contém um campo elétrico, mesmo que esse campo seja localizado no vácuo, essa carga sofrerá a ação de uma força. Dessa maneira pode-se interpretar o campo como o mediador das forças entre as cargas elétricas.

Poder-se-ia perguntar então, o que significa um campo de forças no vácuo? As várias tentativas de interpretar levaram no passado até a criar

um meio hipotético, o éter, análogo a um meio elástico, para comparar o campo elétrico a um fluido. A lei de Coulomb nos trouxe, como na gravitação, a idéia de ação à distância entre partículas, sem a necessidade de um meio, o que resulta na necessidade de uma ação instantânea entre cargas. Experimentalmente se pode verificar que a interação mediada por um campo elétrico ocorre com um tempo limite, indicando uma velocidade finita para a propagação da interação. O estudo dos fenômenos eletromagnéticos permite encontrar essa velocidade limite, ou seja a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo.

1.5.1 Linhas de Campo Elétrico

A ideia de representar a região em torno das cargas por linhas de campo elétrico, traçando curvas que apontam sempre, em qualquer ponto, na mesma direção que o vetor campo elétrico, foi introduzida por Michael Faraday que a representava por linhas de força, criando uma forma de visualizar essa propriedade do espaço em torno das cargas elétricas. Na Fig. 1.8, mostramos alguns aspectos das linhas de força que constituem um campo elétrico:

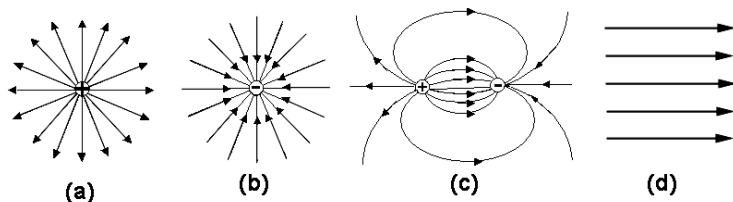


Figura 1.8: Linhas de força para diferentes distribuições de carga; (a) puntiforme positiva; (b) puntiforme negativa; (c) um dipolo elétrico (d) campo elétrico homogêneo, sem carga no meio.

Essa visualização do campo de forças nos permite dizer que as linhas de campo convergem ou divergem das cargas, dependendo delas serem negativas ou positivas. Esse fato nos permite então dizer que as cargas são pontos singulares desse campo podendo ser interpretados como sorvedouros ou fontes de campo elétrico.

Por outro lado, esta interpretação nos permite afirmar que quando as linhas de campo são paralelas, essa região não contém cargas pontuais. De forma empírica, somos levados a dizer que a existência de uma carga está ligada à existência de uma divergência no campo vetorial que representa o campo elétrico, fato que poderá comprovar mais à frente utilizando a Lei de Gauss.

As configurações, representadas na Fig. 1.8, são na realidade um corte plano, de um espaço tridimensional, cuja simetria pode ser sintetizada em duas regras:

- as linhas de campo elétrico são sempre tangentes ao vetor força em cada ponto do espaço, portanto elas nunca devem se interceptar;
- a intensidade do campo pode ser avaliada, comparativamente, pelo número de linhas, por unidade de área, em um plano perpendicular à direção das linhas de campo, por uma grandeza que se denomina fluxo do campo.

1.6 O Princípio da Superposição

O campo eletrostático é um campo independente do tempo, criado por um conjunto de cargas imóveis. O mapa do campo elétrico pode ser obtido pelo valor da força que atua sobre uma carga de prova, q_o , unitária e sempre positiva, colocada em cada ponto do espaço considerado.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_o}. \quad (1.5)$$

O campo elétrico é uma grandeza vetorial e conseqüentemente quando temos muitas cargas elétricas em uma região do espaço, o campo resultante em um dado ponto é a soma vetorial de todos os campos, ou forças por unidade de carga, exercidos nesse ponto.

A combinação da lei de Coulomb com superposição vetorial de campos é denominada, **princípio da superposição**. O método de superpor os campos, produzidos por cada carga, é o mesmo método utilizado para superpor as forças, sejam elas gravitacionais ou elétricas, pois se tratam de campos centrais de natureza matemática análoga, cujos efeitos se podem superpor devido à linearidade dos campos. **O campo de forças elétricas é um campo conservativo**, resultando daí a possibilidade de se superporem os efeitos de forma linear.

Aplicando o princípio da superposição para as forças elétricas, a n cargas que atuam sobre uma carga de prova colocada no ponto P conforme Fig. 1.9, pode-se dizer que o campo resultante será dado por:

$$\vec{E}_P = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{r}_i \quad (1.6)$$

$$= \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i, \quad (1.7)$$

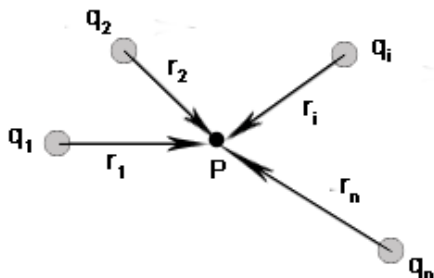


Figura 1.9: Distribuição de n cargas atuando no ponto P no qual se coloca uma carga de prova.

A força que atua sobre a carga de prova q_o colocada no ponto P , poderá então ser calculada por

$$\vec{F}_{q_o} = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i \cdot q_o}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i \tag{1.8}$$

Exemplo 1.3

Cálculo do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico como o mostrado na Fig. 1.10, sobre a mediatriz e utilizando do princípio da superposição.

Solução

O campo resultante será dado por

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-Q}.$$

Como se pode observar na Fig. 1.10, a resultante tem a direção do eixo dos x , pois as componentes na direção y se anulam e

$$\vec{E}_R = -\frac{2kQ}{r^2} \cos(\theta) \hat{i},$$

em que

$$\cos(\theta) = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2r}.$$

Portanto o módulo do campo elétrico ao longo do eixo do dipolo pode ser calculado por

$$E_R = \frac{2kQ}{r^2} \cdot \frac{d}{2r} = \frac{kQd}{r^3}.$$

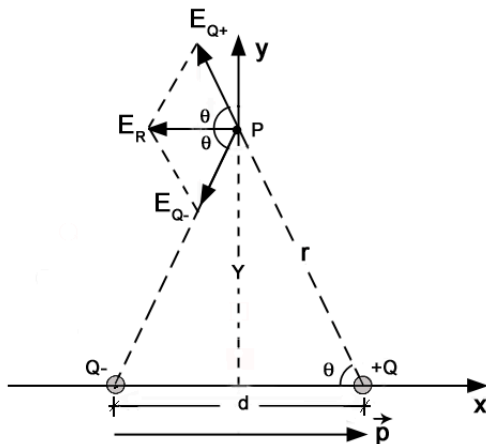


Figura 1.10: Campo Elétrico produzido por um dipolo elétrico sobre a sua mediatriz.

Em que $p = Q.d$, denominado de momento dipolar elétrico, é um vetor cuja direção, no caso da Fig. 1.10, é a mesma do eixo dos x , portanto:

$$\vec{E}_R = -\frac{k}{r^3}\vec{p}.$$

Para distâncias Y muito grandes comparadas com o tamanho do dipolo d , a expressão do dipolo pode ser simplificada para,

$$\vec{E}_R = -\frac{k}{Y^3}\vec{p}.$$

O problema do dipolo, como foi mostrado no exemplo 1.3, é uma das aplicações do princípio da superposição na qual o campo elétrico resultante é paralelo ao segmento que une as duas cargas aponta para a carga $-Q$. Neste exemplo, também se pode considerar o caso limite em que o ponto P está a uma distância Y muito maior que d , ou seja, para $Y \gg d$

$$|E_R| \cong \frac{kp}{Y^3} \tag{1.9}$$

1.6.1 Ordem de Polaridade

Em escala microscópica, a matéria apresenta uma estrutura que apesar de ser eletricamente neutra, podem apresentar estrutura polar ou não. o

que quer dizer que os átomos ou moléculas que são eletricamente neutros, podem ou não terem os centros de carga elétrica coincidentes ou não. Como consequência dos centros de carga positiva e negativa serem os mesmos, o átomo não possui momento dipolar elétrico permanente mas sob a ação de um campo elétrico é, possível polarizar a substância criando-se momentos de dipolo elétricos induzidos.

Por outro lado as moléculas, tal como as da água, como muitas outras, possuem dipolo elétrico, ou seja, naturalmente os centros de carga da molécula estão separados formando dipolos permanentes.

Assim, as moléculas podem ou não ser polares e nesse sentido, a polarização de uma substância corresponde ao alinhamento dos momentos dipolares permanentes ou induzidos através da ação de um campo elétrico externo.

A polarização de uma substância sempre poderá ocorrer por efeito da ação do campo elétrico externo sobre dipolos permanentes ou não. No caso das moléculas apolares, o efeito do campo externo será o de induzir a separação de cargas criando dipolos induzidos. Os efeitos físicos e químicos da polarização elétrica são bem conhecidos e incluem os efeitos no transporte de ions nas membranas celulares, nos fenômenos de superfície (tensão superficial) mudança do índice de refração etc.

Em resumo, ao estudar os efeitos da interação elétrica, tem-se que ir além da simples atração e repulsão entre cargas, ou mono-polos elétricos e incluir as interações de diferentes ordens de polaridade como a dipolar.

Comparando o campo devido a diferentes disposições de cargas elétricas pode-se concluir pela existência de diferentes ordens de polaridade. O campo elétrico devido a uma única carga tem a forma monopolar, $\frac{1}{r^2}$ enquanto que o de um dipolo tem a forma $\frac{1}{r^3}$ (dipolar) ou seja, este último tende a zero mais rapidamente que o primeiro. Além destas existem outras ordens de polaridade superior como a que se sugere no problema 12, que trata do quadrupolo, para verificar que o elétrico o campo decai como a função $\frac{1}{r^4}$. Nesse problema se define uma nova propriedade elétrica da matéria, chamada de momento quadrupolar. Nesse problema apesar da carga total nula o dois momentos de dipolo também se anulam, mas mesmo assim ocorre interação elétrica quadrupolar. Mesmo sem uma análise mais profunda, o que será feito no capítulo de potencial elétrico, pode-se dizer que ao aumentar a ordem da polaridade de cargas, o campo elétrico decairá mais rapidamente no espaço que as circunda, ou seja o alcance da interação elétrica será cada vez menor.

1.7 Funções distribuição de carga

1.7.1 Distribuição volumétrica

Muitas vezes, como já foi dito, torna-se importante ignorar que as cargas elétricas são formadas por pacotes elementares, como os elétrons e prótons, utilizando o conceito de distribuição contínua de carga. Descreve-se dessa maneira a carga elétrica por uma função densidade de carga $\rho(x, y, z)$. Nesse caso, o mesmo princípio da superposição que já foi discutido no caso de distribuição de cargas discretas pode ser aplicado quando se passa à descrição dos campos criados por distribuições contínuas de cargas elétricas, sejam elas distribuições sobre linhas, superfícies ou volumes de carga. Assim no caso do volume, deve-se subdividir o volume de carga V em pequenos volumes ΔV , tão pequenos quanto for necessário para que a carga contida em cada um desses volumes possa ser tratada como puntiforme, ou seja:

$$\Delta q = \rho \Delta V, \quad (1.10)$$

em que a densidade de carga ρ [C/m^3] (carga por unidade de volume) possa ser tratada como um função constante no interior do volume elementar. Levando ao limite, o volume elementar $\Delta V \rightarrow 0$, descreve-se os problemas de distribuição de carga como se fossem contínuos, ou seja, fazendo com o somatório do princípio da superposição possa ser substituído por uma integração:

$$\sum_j q_j = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_j \rho_j \Delta V_j = \int_v \rho dV. \quad (1.11)$$

Existem muitos exemplos nos quais a distribuição de cargas é volumétrica. Pode-se citar, por exemplo, as lâmpadas fluorescentes nas quais os ions distribuídos no interior do gás ionizado formam um volume de carga elétrica.

1.7.2 Distribuição superficial

No caso da distribuição superficial de carga, a carga total sobre a superfície S pode ser calculada utilizando o valor da densidade superficial de carga σ [C/m^2],

$$\sum_j q_j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_j \sigma_j \Delta S_j \equiv \int_s \sigma ds. \quad (1.12)$$

1.7.3 Distribuição linear

Por extensão, para o caso de uma distribuição linear l , onde a constante de carga é λ [C/m], com o que teremos:

$$\sum_j q_j = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_j \lambda_j \Delta l_j \equiv \int_l \lambda dl. \quad (1.13)$$

1.7.4 Campo Elétrico devido a distribuições contínuas

A distribuição contínua de carga pode ser tratada da mesma maneira como foi feito para a aplicação da Lei de Coulomb para o cálculo do campo de n cargas pontuais. Para isso, é preciso dividir o domínio da carga em n elementos, aplicando-se a cada elemento a lei de Coulomb. No limite de $n \rightarrow \infty$, o campo pode ser calculado utilizando-se a integral dos campos elementares da seguinte forma:

$$\vec{E} \simeq \sum^n \frac{k\Delta Q}{r^2} \hat{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^n \frac{k\Delta Q}{r^2} \hat{r}, \quad (1.14)$$

$$= k \int \frac{dQ}{|r|^3} \vec{r}, \quad (1.15)$$

$$= k \int_v \frac{\rho dV}{|r|^3} \vec{r}. \quad (1.16)$$

Desta forma teremos, em vez de um somatório, uma integral de linha, uma integral de superfície ou uma integral de volume, de acordo com a forma com que a carga estiver distribuída. É importante lembrar que um problema tridimensional sempre poderá ser reduzido ao linear ou superficial em função da forma da distribuição da carga e por isso vamos apresentar a forma geral de cálculo do campo para o caso de distribuição volumétrica de carga.

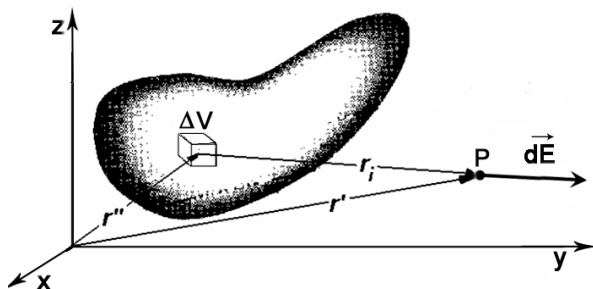


Figura 1.11: Distribuição contínua de carga dividida em pequenos elementos de volume.

Os vetores posição do ponto e da carga dQ estão referidos como na Fig. 1.11 a um sistema de coordenadas cuja origem é O . É preciso lembrar que o vetor \vec{r}_i é sempre um vetor cuja origem é a carga, portanto pode-se definir

o cálculo do campo em relação ao sistema cartesiano, como o da Eq.1.16 usando a diferença entre os dois vetores que posicionam o ponto P e a carga ΔQ , conseqüentemente usaremos $\vec{r}_i = \vec{r}' - \vec{r}''$, como é mostrado na Fig. 1.11.

$$\vec{E} = k \int \int \int \rho(r) \frac{\vec{r}' - \vec{r}''}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3} dV. \tag{1.17}$$

Exemplo 1.4

Cálculo do campo elétrico produzido por uma distribuição linear de carga.

Solução

Vamos considerar uma distribuição linear de carga elétrica, cuja densidade vale $\lambda C/m$, e inicialmente calcularemos o campo em um ponto distanciado Y do centro do centro da linha de carga de comprimento $L = x_2 - x_1$.

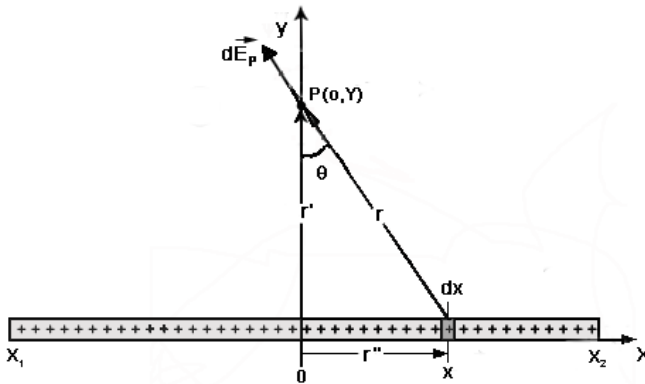


Figura 1.12: Distribuição linear de carga para o Exemplo 1.4.

Supondo que a linha é dividida em elementos de carga $dq = \lambda dx$, podemos aplicar a lei de Coulomb a cada um desses elementos obtendo o campo elementar dE_P , produzido no ponto P, utilizando a geometria representada na Fig. 1.12,

$$\begin{aligned} \vec{dE}_P &= k \frac{dq}{r_i^2} \hat{r}, \\ &= k \frac{\lambda dx}{r^2} \hat{r}, \end{aligned}$$

$$= k \frac{\lambda dx}{r^3} \vec{r}, \quad (1.18)$$

na qual o vetor \vec{r} tem a sua origem em cada um dos elementos de carga. Seguindo a orientação vetorial dada pela Eq. 1.17 trataremos este problema a partir do centro do sistema de referência, representado esse vetor como a diferença entre dois vetores cuja origem é a mesma: $\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}''$. Portanto Eq. 1.18 poderá ser escrita como:

$$d\vec{E}_P = k \frac{\lambda dx}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3} (\vec{r}' - \vec{r}''). \quad (1.19)$$

Os vetores \vec{r}' e \vec{r}'' podem ser representados em coordenadas cartesianas e para analisar mais facilmente os problemas de distribuição linear de carga vamos analisar o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= x\hat{i}, \\ \vec{r}' &= Y\hat{j}, \end{aligned}$$

onde o vetor diferença será dado por:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r}'', \\ &= Y\hat{j} - x\hat{i}. \end{aligned}$$

O vetor diferencial $d\vec{E}_P$, pode ser escrito na forma vetorial, utilizando essas definições:

$$\begin{aligned} d\vec{E}_P &= \frac{k\lambda dx(Y\hat{j} - x\hat{i})}{|Y\hat{j} - x\hat{i}|^3} \\ &= \frac{k\lambda dx(Y\hat{j} - x\hat{i})}{(Y^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Esta expressão, Eq. 1.20, para o vetor campo diferencial pode ser escrita na forma de duas componentes escalares:

$$dE_x = -\frac{k\lambda x dx}{(Y^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (1.21)$$

$$dE_y = \frac{k\lambda Y dx}{(Y^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (1.22)$$

O campo elétrico total pode ser obtido integrando as duas componentes entre os limites que definem a linha de carga com centro no ponto $(0, 0)$ ou seja

$\{x_1, x_2\}$ portanto

$$E_x = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{k\lambda x dx}{(Y^2 + x^2)^{3/2}} = -k\lambda \left. \frac{1}{(x^2 + Y^2)^{1/2}} \right|_{x_1}^{x_2} \quad (1.23)$$

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k\lambda Y dx}{(Y^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{Y} \left. \frac{x}{(x^2 + Y^2)^{1/2}} \right|_{x_1}^{x_2}. \quad (1.24)$$

No caso da linha infinita os limites serão: $\{\infty, -\infty\}$, portanto:

$$E_x = -k\lambda \left. \frac{1}{(x^2 + Y^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (1.25)$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{Y} \left. \frac{x}{(x^2 + Y^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2k\lambda}{Y}. \quad (1.26)$$

O que nos mostra que neste caso o campo elétrico é perpendicular à linha em todos os pontos da mesma, portanto para uma linha infinita o vetor campo elétrico, para um ponto qualquer a uma distância y da mesma, será:

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{y} \hat{j} \quad (1.27)$$

Exemplo 1.5

Cálculo do campo elétrico produzido por um plano de carga de dimensões infinitas e com densidade de carga σ C/m², em um ponto qualquer situado a uma distância vertical Z do plano.

Solução

Neste exemplo vamos utilizar a solução do exemplo 1.4, considerando que um plano de carga pode ser construído a partir de um número infinito de linhas de carga infinitas, conforme nos mostra a Fig.1.13. Para a linha localizada a uma distância y , do centro de referência o campo produzido no ponto P(0,0,Z) pode ser calculado a uma distância qualquer r' , através da Eq. 1.27,

$$d\vec{E}_P = \frac{2k\sigma dy}{r'} \hat{r}', \quad (1.28)$$

na qual a carga é definida como $dq = \sigma dy$. Considerando as relações trigonométricas a partir da geometria da Fig. 1.13:

$$\begin{aligned} |r'| &= Z \sec\theta \\ y &= Z \tan\theta; \quad dy = Z \sec^2\theta d\theta, \end{aligned}$$

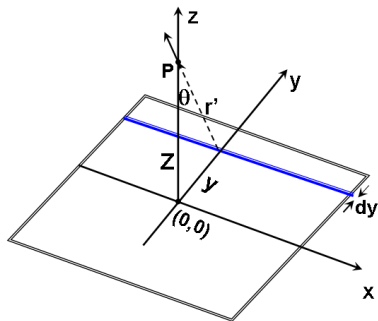


Figura 1.13: Geometria para o cálculo do campo elétrico produzido por um plano de carga elétrica de dimensões infinitas

obtem-se a expressão do campo:

$$d\vec{E}_P = \frac{2k\sigma Z \sec^2\theta d\theta}{Z \sec\theta} \quad (1.29)$$

Utilizando os argumentos da simetria do problema, podemos afirmar que tanto a componentes E_x como a E_y são nulas, considerando que o plano de carga possui dimensões infinitas, restando portanto, a componente E_z ,

$$\begin{aligned} dE_Z &= dE_p \cos\theta = \frac{2k\sigma Z \sec^2\theta \cos\theta d\theta}{Z \sec\theta} \\ &= 2k\sigma d\theta. \end{aligned} \quad (1.30)$$

A solução da Eq. 1.30, para o caso de um plano infinito, considerando o domínio $\theta = \pi/2, -\pi/2$ será:

$$E_Z = 2k\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2\pi k\sigma. \quad (1.31)$$

Como consequência podemos dizer que o campo produzido por um plano infinito é constante e não depende da distância ao plano de carga e é perpendicular ao plano. Em outras palavras, de forma objetiva, pode-se afirmar que nas proximidades de um plano qualquer o campo pode ser considerado, aproximadamente, como constante.

Exemplo 1.6

Cálculo do campo elétrico criado por um anel de carga com raio a , cuja densidade carga elétrica é λ C/m em um ponto P localizado a uma distância z do centro do anel.

Solução

Considerando a geometria mostrada na Fig. 1.14, o campo $d\vec{E}$, gerado por um elemento de carga qualquer $dq = \lambda dl$, será então dada por,

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^2} \hat{dr} = k\lambda \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3} dl, \quad (1.32)$$

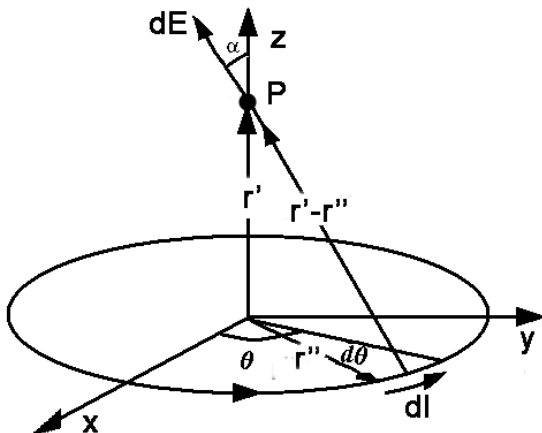


Figura 1.14: Geometria de carga em forma de anel

e a carga total contida no anel será dada por:

$$q = \int_c \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta. \tag{1.33}$$

em que o elemento de arco é $dl = a d\theta$ e os vetores \vec{r}' e \vec{r}'' podem ser escritos como:

$$\vec{r}' = z\hat{k}, \tag{1.34}$$

$$\vec{r}'' = x\hat{i} + y\hat{j} = a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}, \tag{1.35}$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}''| = (z^2 + a^2)^{1/2} = \text{constante} = b. \tag{1.36}$$

Portanto, o vetor campo total será a integral da Eq. 1.32, nos limites do ângulo θ , poderá ser escrito como:

$$\vec{E} = k\lambda \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{k} - a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta. \tag{1.37}$$

Os módulos das três componentes do campo serão:

$$E_x = k\lambda \int_0^{2\pi} -\frac{a \cos \theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta,$$

$$\begin{aligned}
&= -k\lambda \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta, \\
&= -k\lambda \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} (\sin \theta)_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}
E_y &= k\lambda \int_0^{2\pi} -\frac{a \sin \theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta, \\
&= -k\lambda \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta, \\
&= -k\lambda \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} (\cos \theta)_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
E_z &= k\lambda \int_0^{2\pi} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta, \\
&= k\lambda \frac{za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta, \\
&= k\lambda \frac{za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} [\theta]_0^{2\pi}, \\
&= \frac{2\pi a k \lambda z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{kqz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Como consequência, o campo elétrico resultante terá as seguintes componentes:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_x &= 0, \\
\vec{E}_y &= 0, \\
\vec{E}_z &= \frac{kqz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Verifica-se assim que o campo terá a direção normal ao plano do anel, na direção z , quando a carga for positiva. A forma de solução adotada aqui permite obter o campo elétrico para qualquer tipo de arco circular, bastando para cada caso, modificar os limites de integração, no cálculo das componentes do vetor campo elétrico.

Finalmente, analisando a expressão do campo, Eq. 1.41, pode-se dizer que existem dois limites importantes, o primeiro é o valor do campo no ponto central do anel, que resulta ser nulo, $E_{(z=0)} = 0$.

Um outro limite, que ocorre para $z \gg a$, nos mostra um campo monopolar ou seja, o campo de uma carga pontual colocada no centro do anel. Para mostrar esse limite, faz-se a seguinte modificação na expressão do campo:

$$\vec{E}_z = \frac{kqz}{z^3 \left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{3/2}} \hat{k}. \quad (1.42)$$

A fração pode ser expandida em forma de série, da seguinte forma:

$$\left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}(a/z)^2 + \dots \quad (1.43)$$

Para $z \gg a$, só os dois primeiros termos da série já dão uma boa precisão par o cálculo do campo,

$$\begin{aligned} \vec{E}_z &\simeq \frac{kq}{z^2 \left[1 - \frac{3}{2}(a/z)^2\right]} \hat{k}, \\ &\simeq \left(\frac{kq}{z^2} - \frac{3kqa^2}{2z^4}\right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Dessa maneira para $z \gg a$, o campo elétrico pode se aproximar para um campo de monopolo,

$$\vec{E}_z \simeq \left(\frac{kq}{z^2}\right) \hat{k} \quad (1.45)$$

Exemplo 1.7

Cálculo do campo criado por uma distribuição superficial de carga, produzida por um disco de carga.

Solução

Neste exemplo, utilizando a mesma geometria da Fig. 1.14, modificando a distribuição de carga para do tipo superficial, ou seja, considera-se um anel com raio médio $r'' \equiv r$, mas com largura dr , ou seja um elemento de superfície. Neste caso, o valor da distância b não será constante, pois dependerá do raio r que nesta distribuição é uma variável. O elemento de carga poderá então ser escrito como,

$$dq = dA\sigma,$$

em que σ C/m^2 é a densidade superficial de carga. Dessa maneira, o campo elementar, gozará das mesmas propriedades de simetria, como no caso anterior, e o campo resultante também terá a direção de z ,

$$dE_z = k \frac{\sigma dA}{b^2} \cos(\alpha) = k \frac{\sigma r d\theta dr}{b^2} \frac{z}{b},$$

em que o elemento de área do anel elementar é dado por $dA = rd\theta dr$. O valor do campo total deverá ser a integral de dE_z , no domínio do ângulo θ e de b . Para o caso de um disco de raio máximo R , a integral será:

$$\begin{aligned} E_z &= k\sigma z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \\ &= k\sigma\pi a \int_0^R \frac{2rdr}{\sqrt{(z^2 + r^2)^{3/2}}} = 2\pi\sigma k \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

Agora pode-se discutir o valor do campo para vários limites interessantes, o primeiro seria par $z \gg r$ que resulta no campo de mono-polo ou seja $1/r^2$. Um outro limite interessante é o de um plano infinito de carga já que esse limite se consegue fazendo $R \rightarrow \infty$ resultando em um campo dado por,

$$E_{(R \rightarrow \infty)} = 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

ou seja, o campo é constante e independente da distância z ao ponto P .

Exemplo 1.8

Cálculo do Campo Elétrico de Distribuição Esférica de Carga: Casca Esférica com densidade uniforme de carga superficial.

Solução

O exemplo de uma casca esférica como distribuição de carga elétrica pode ser utilizado para representar o problema prático de uma carga distribuída uniformemente sobre uma esfera condutora quando a mesma é eletrizada ou mesmo um corpo isolante esférico com espessura muito fina, conforme nos mostra a Fig. 1.15, na qual descreve-se a geometria do problema.

Considerando uma esfera de raio R que possui uma carga Q distribuída uniformemente sobre a sua superfície podemos definir a sua densidade superficial de carga como:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad (1.46)$$

cujo diferencial nos mostra que a carga por elemento de área, neste caso representando a área do anel elementar mostrado na Fig. 1.15, será:

$$dQ = \sigma dA = \sigma(2\pi R \sin\theta)(Rd\theta) = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \quad (1.47)$$

O campo elétrico produzido por esse anel elementar de carga, no ponto P será:

$$dE_x = \frac{k dQ}{r^2} \cos\alpha = \frac{k\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{r^2} \cos\alpha. \quad (1.48)$$

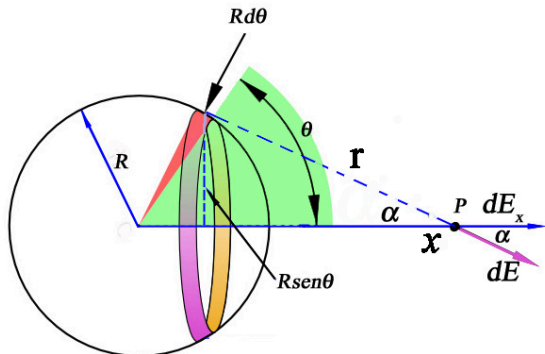


Figura 1.15: Geometria da casca esférica de carga

Aplicando a lei dos senos teremos:

$$r^2 = x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta, \tag{1.49}$$

consequentemente,

$$2rdr = 2xR\sin\theta d\theta; \text{ portanto } \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{xR}; \tag{1.50}$$

para o ângulo α temos:

$$R^2 = x^2 + r^2 - 2xrcos\alpha \text{ portanto } cos\alpha = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr}. \tag{1.51}$$

Substituindo esses valores na Eq. 1.48:

$$dE_x = \frac{k\sigma 2\pi R^2}{r^2} \left(\frac{rdr}{xR}\right) \left(\frac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr}\right) = \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2}\right) dr \tag{1.52}$$

Os limites de integração do campo, para pontos externos à esfera, são definidos como:

$$(x - R) \leq r \leq (x + R); \tag{1.53}$$

portanto

$$E_x = \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \int_{x-R}^{x+R} \left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2}\right) dr, \tag{1.54}$$

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \left[r - \frac{x^2 - R^2}{r} \right]_{x-R}^{x+R}. \tag{1.55}$$

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \left[(x + R) - (x - R) - (x^2 - R^2) \left(\frac{1}{x + R} - \frac{1}{x - R} \right) \right] \quad (1.56)$$

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \left[2R - (x^2 - R^2) \frac{(x - R) - (x + R)}{(x + R)(x - R)} \right] \quad (1.57)$$

$$= \frac{k\sigma\pi R^2}{x^2}. \quad (1.58)$$

Dessa maneira o campo elétrico produzido no ponto P por uma casca esférica de carga é dado por:

$$E_x = \frac{k\sigma 4\pi R^2}{x^2} = \frac{kQ}{x^2} \quad (1.59)$$

Para pontos no interior da casca devem-se alterar os limites de integração da Eq. 1.54 para:

$$(R - x) \leq r \leq (x + R)$$

portanto,

$$E_x = \frac{k\sigma\pi R}{x^2} \left[\left(r - \frac{x^2 - R^2}{r} \right) \right]_{R-x}^{x+R} = 0. \quad (1.60)$$

Dessa maneira conclui-se que o campo no interior da casca é nulo: $E_x = 0$, em todos os pontos.

A representação gráfica do campo dentro e fora da casca esférica é uma função que pode ser observada na Fig. 1.16:

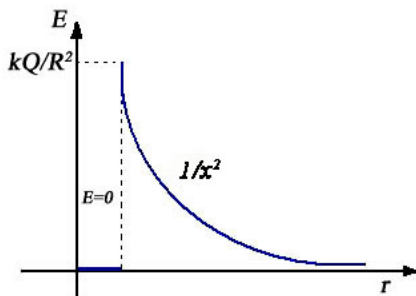


Figura 1.16: Campo elétrico produzido por uma casca esférica em pontos interiores e exteriores à mesma

Campo produzido por uma esfera maciça de carga:

Esta distribuição de carga pode se referir ao caso de uma esfera de material dielétrico, com carga volumétrica uniformemente distribuída. Por simplificação vamos considerar que a esfera maciça seja constituída por um número grande de cascas esféricas, cujo campo obtivemos e dessa maneira vamos calcular o campo por analogia. Como no exterior de cada casca esférica se produz um campo igual ao produzido por uma carga pontual colocado no centro da distribuição esférica, podemos integrar a carga de todas as n cascas:

$$E_r = \frac{k}{r^2} \int_n dq = \frac{kQ}{r^2} \quad (1.61)$$

Considerando agora que o ponto P , onde desejamos calcular o campo, esteja no interior da esfera ou seja $r < R$, essa integração deve levar em consideração que o raio de cada casca é variável de 0 a R , portanto a parcela de carga no interior de cada uma das esferas varia, em função desses limites e será dada por:

$$q_r = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3} \quad (1.62)$$

Da mesma maneira, como o campo é devido a essa carga para cada ponto P , teremos:

$$E_r = \frac{kq_r}{r^2} = \frac{kQr^3/R^3}{r^2} = \frac{kQ}{R^3} r. \quad (1.63)$$

A representação gráfica desta função que representa o campo dentro e fora de uma esfera maciça pode ser observada na Fig. 1.17:

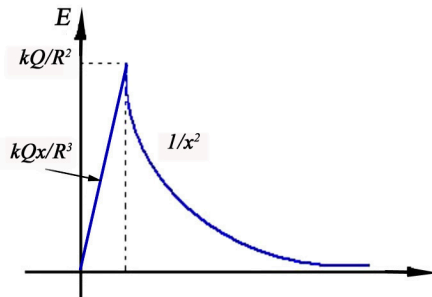


Figura 1.17: Campo elétrico produzido por uma esfera maciça de carga em pontos interiores e exteriores à mesma

No próximo capítulo vamos estudar estes mesmos problemas, mas utilizando a Lei de Gauss, a partir da ideia de que o campo em uma distribuição

de carga pode ser analisado de uma nova perspectiva: imaginem que nos dois casos, na casca e esfera maciça, podemos escrever o campo da seguinte forma:

$$E\epsilon_o(4\pi r^2) = Q, \quad (1.64)$$

Portanto, não importa a qual distância estamos calculando o campo sempre o produto do campo pela área de uma superfície concêntrica à distribuição de carga vai ter sempre o mesmo valor $Q\epsilon_o$.

1.8 Aplicações Tecnológicas da Eletrostática

Revisando os princípios de funcionamento dos processos industriais baseados na eletrostática, observa-se que os mesmos já eram conhecidos e descritos no século XIX. No entanto, somente a partir de 1907, com o desenvolvimento dos precipitadores eletrostáticos, é que a eletrostática iniciou a ser aplicada em processos de sucesso industrial⁶. A esta utilização prática da eletrostática se seguiram outras e hoje existe um grande desenvolvimento científico e tecnológico que não pode ser facilmente resumido, pois suas aplicações vão desde a pintura eletrostática até a ciência espacial.

• Precipitação Eletrostática

Os precipitadores eletrostáticos removem partículas do ar em um processo que pode ser dividido em duas etapas: primeiro o ar com poeira atravessa um espaço com uma série de pequenos condutores eletrizados alternados entre placas também metálicas. A ionização das moléculas de ar permite fazer com que as partículas de poeira sejam eletrizadas. Na segunda etapa as partículas eletrizadas aderem a placas metálicas entre as quais existe um campo elétrico oscilante. Este processo limpa o ar a níveis muito altos. A utilização da precipitação eletrostática pode hoje ser utilizada nos aparelhos de ar condicionado, removendo o pólen e outros alergênicos. A remoção de aerossóis tóxicos é uma outra utilização tanto na área da saúde como na área tecnológica como na indústria de semicondutores.

• Pintura Eletrostática

O processo de proteção de superfícies metálicas com camadas muito finas de pintura pode ser atingida pela pintura eletrostática. Este processo garante maior uniformidade e economia de tinta. A utilização de tintas termoplásticas permitiu o desenvolvimento deste processo com rendimento muito maior e aplicações muito diversificadas.

⁶I.I. Incelet, Industrial applications of static electricity, Journal of Electrostatics, 16, 287-298(1985).

- **Biotecnologia** Muitos dos processos biológicos são controlados por fatores eletrostáticos, resultantes da maior ou menor concentração de íons. O transporte de energia através de membranas celulares, é um desses exemplos. A manipulação de células e macromoléculas como o DNA pode ser realizada utilizando-se forças eletrostáticas. O uso prático destes fenômenos poderá gerar novas aplicações industriais realmente inovadoras.
- **Partículas Ultrafinas e Nanotecnologia** O uso de partículas nanométricas é crescente nas aplicações industriais. Essas partículas são caracterizadas por alta energia de superfície que, mesmo em pequenas concentrações, poderão alterar as propriedades de cerâmicas, metais, estruturas óticas e mesmo de semicondutores. A área de nanotecnologia está levando os limites da geração de novos materiais a dimensões atômicas, com promessa de novíssimas aplicações.
- **Ciência Espacial** A ausência de gravidade e existência de alto vácuo no espaço permite a utilização das forças eletrostáticas em processos que utilizem partículas de grande tamanho. O uso de motores iônicos é um desses exemplos. A partir de um gás nobre, que serve de combustível, é criado um plasma, um estado da matéria em que os átomos estão separados em elétrons e núcleos atômicos. As partículas com carga positiva são, então, aceleradas por um campo elétrico para fora do motor. Ao saírem, esses íons empurram a nave na direção oposta. O modelo da nave espacial da NASA lançada em 24 de outubro de 1998 e que ficou em uso até 2001 *Deep Space-1*⁷. é eletrostático.

1.9 Questões, Exercícios e Problemas

1. Qual o valor da elétrica elementar "e" e a que partículas atômicas ela está associada?
2. Porque os quarks não são considerados cargas elementares na eletricidade?
3. A aplicação do princípio da conservação, da carga elétrica, exige que o corpo esteja isolado. Como é possível realizar o isolamento de forma prática?
4. As forças elétricas entre cargas elétricas podem ser interpretadas pela Lei de Coulomb ou pela existência de um campo elétrico, explique a diferença entre as duas interpretações.

⁷M. Raymann, Deep Space 1, <http://nmp.nasa.gov/ds1/>,(01/11/2006)

5. Que diferença existe entre a eletrização de um condutor e a de um isolante sob a ação de um campo elétrico externo?
6. A eletrização por fricção pode ser explicada utilizando uma série triboelétrica, explique como ao atritar dois materiais diferentes um fica positivo e outro negativo? A que se pode atribuir a ordenação dos materiais em uma série triboelétrica?
7. Um bastão, que pode ser a sua caneta de plástico, quando atritada se eletriza atraindo corpos neutros, como pedacinhos de papel. Como isso pode ocorrer? Explique também, por que depois que os pedacinhos de papel tocam o bastão, alguns são repelidos?
8. A carga de prova, capaz de sentir a presença de um campo elétrico, deve ser sempre positiva? Como se poderá analisar o campo elétrico com uma carga negativa?
9. Explique numericamente como a partir do experimento da balança de Coulomb foi possível obter a Lei de Coulomb?
10. Nos dias em que vai chover é difícil realizar qualquer atividade que envolva a eletrostática; por exemplo, as máquinas Xerox tiram cópias muito ruins. Mas logo depois de parar a chuva, em geral, se podem realizar experimentos de eletrostática com mais sucesso. Explique o que acontece nos dois casos, antes e depois da chuva.
11. Considere uma distribuição, à sua escolha, de três cargas pontuais, localizadas nos vértices de um triângulo equilátero, com lados de 10cm e com cargas iguais a $1nC$, $2nC$ e $-4nC$. Calcule a resultante das forças que atuam na carga negativa.
12. As linhas de força apresentam duas propriedades: primeiro não se cruzam, segundo o número de linhas é indicativo da intensidade do campo. Por quê?
13. Desenhe as linhas de campo elétrico de uma distribuição de duas cargas positivas quando: a) as cargas forem iguais; b) quando as cargas forem q e $2q$.
14. Quatro cargas elétricas iguais e positivas colocadas nos vértices de um quadrado de lado a geram, no centro do quadrado, um campo elétrico nulo. Como se pode verificar se esse ponto é de equilíbrio estável ou instável, seguindo o mesmo raciocínio do exemplo 1.1.
15. Considere a mesma distribuição de carga da questão 11 e obtenha o valor do campo elétrico em cada um dos três vértices.

16. Considere um anel de carga de raio 15cm , com uma distribuição de carga igual a $\lambda = 5nC/m$. Calcule o campo elétrico no centro do anel e em um ponto sobre o eixo z do mesmo a 15cm do centro.
17. Obtenha a expressão do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico, no eixo que une as duas cargas.
18. Uma distribuição de cargas que forma um quadrupolo consiste de uma carga negativa $-2Q$ localizada na origem do sistema de coordenadas e duas positivas, uma localizada em $x = d$ e outra em $x = -d$. A soma dos momentos dipolares desta distribuição é nula, mas a distribuição possui um momento, o chamado momento quadrupolar elétrico, $2Qd^2$. Calcule o valor do campo elétrico em um ponto qualquer do eixo dos x localizado a uma distância x da origem, em função do momento quadrupolar. Sugestão: o campo pode ser calculado de duas maneiras; a primeira somando o campo produzido por quatro cargas, e a segunda somando o campo produzido por dois dipolos.
19. Utilizando o exemplo 1.4 calcular o campo elétrico, em um ponto $P(0, y)$, produzido por uma distribuição uniforme e linear de carga de comprimento L , colocada no intervalo $x\{0, L\}$.
20. Utilizando o resultado algébrico do exemplo 1.5 faça um estudo gráfico da função campo elétrico $E(z)$.
21. Considere dois planos de carga paralelos e de dimensões infinitas, um com carga positiva e outro com negativa e calcule o valor do campo elétrico, entre os planos e fora dos mesmos. Desenhe as linhas de campo entre os planos e fora dos mesmos.
22. Utilizando a mesma lógica matemática do Exercício 1.8 deduza a expressão do campo elétrico produzido por uma esfera maciça de carga elétrica que possui um raio externo R e densidade de carga volumétrica $\rho C/m^3$ para pontos no interior e no exterior da esfera.
23. Fazendo uma revisão de todos os cálculos de campo neste capítulo faça um resumo das propriedades do campo elétrico em função da simetria com a distribuição de carga elétrica.
24. Faça uma pequena pesquisa bibliográfica, utilizando, livros, sites da internet, ou mesmo material técnico sobre um dos temas abaixo de sua livre escolha (a escrita deve ser sua, sendo permitido a apresentação de gráficos ou mesmo figuras desde que indicada a fonte bibliográfica). Temas: precipitadores de poeira, ou filtros eletrostáticos, pintura eletrostática, motores iônicos para transporte espacial.

CAPÍTULO 2

Lei de Gauss

Carl Friedrich Gauss, matemático e astrônomo famoso, trabalhou em mecânica celeste, eletromagnetismo, ótica e teoria dos erros...

No capítulo anterior, mostrou-se que o campo elétrico pode ser calculado, tanto para cargas puntiformes como distribuídas, utilizando-se a Lei de Coulomb associada ao princípio da superposição e o cálculo integral. Para problemas onde existe simetria da distribuição de carga, é possível utilizar um novo método baseado na "Lei de Gauss", tornando o cálculo do campo muito simples. A lei de Gauss, na sua forma integral, parte do cálculo do fluxo do campo elétrico, uma integral de área e de uma integral do volume limitado pela superfície fechada, denominada gaussiana.

2.1 Distribuição de carga e campo elétrico

A existência de um campo elétrico no espaço é observado quando se coloca uma carga elétrica nos vários pontos desse espaço. A visualização deste processo de sondagem é a construção gráfica das linhas de força, através de curvas tangentes em cada ponto em direção do campo elétrico nesse ponto. A direção e sentido do campo define a orientação das linhas que constituem a representação gráfica do campo. A partir dos cálculos baseados na Lei de Coulomb, realizados no capítulo um, pode-se deduzir a forma da distribuição

de linhas de campo no espaço que circunda a distribuição de cargas elétricas. A simetria entre a distribuição de carga e as linhas de campo pode ser resumida para distribuição de cargas pontuais, como o monopolo e o dipolo, a distribuição plana, esférica e cilíndrica. De forma resumida se pode concluir que as cargas pontuais e cargas esféricas e cilíndricas geram campos de simetria radial, enquanto que a distribuição plana gera campo perpendicular ao plano de carga.

A visualização das linhas de campo elétrico nos mostra a simetria entre a distribuição de carga e o campo elétrico mas permite, apenas uma análise qualitativa da intensidade do campo, através da densidade de linhas de campo convencionando-se que a distância entre linhas é inversamente proporcional à intensidade do campo.

Algumas propriedades da representação de campos vetoriais, podem ser aplicadas ao campo elétrico assim as linhas de campo não podem se cruzar, pois a direção do campo nesse ponto de intersecção deixaria de ser única. Por convenção as linhas de campo divergem das cargas positivas e convergem às cargas negativas. Ao contrário que se pensa e se pode concluir de alguns experimentos muito simples, as linhas de campo não são trajetórias de partículas carregadas soltas em repouso no campo elétrico. Se a partícula é colocada em repouso o seu movimento só inicia na direção do campo mas se a partícula é lançada em movimento, a sua trajetória não segue a direção do campo, ou da força.

2.2 Conceito de Fluxo do Campo Elétrico

Uma das formas mais simples de entender o significado do fluxo do campo elétrico é utilizar a analogia com o campo de velocidades $\vec{v}(x, y, z)$ das partículas de um fluido, por exemplo o fluxo de água em uma tubulação. Mergulhando dentro do fluxo de água uma tela de área A , dependendo da inclinação da tela em relação ao campo de velocidades como está mostrado na Fig. 2.1, teremos um fluxo para cada inclinação, sendo máximo o fluxo quando a tela é normal ao campo de velocidades.

O fluxo de água através da tela, quando a mesma é perpendicular ao campo vetorial é dado por

$$\Phi = vA [m^3/s], \quad (2.1)$$

também definido como a vazão de fluido através da tela. Quando a tela está inclinada em relação ao fluxo de líquido, a vazão através da mesma será menor, pois a área normal, efetivamente atravessada pelo fluxo, diminui para $A\cos\theta$ e o fluxo, nesse caso, será dado por:

$$\Phi = vA \cos(\theta) [m^3/s]. \quad (2.2)$$

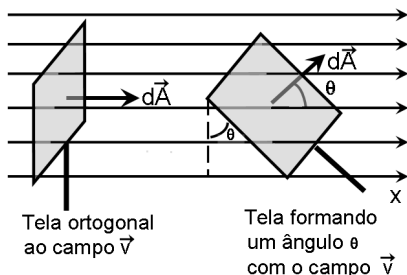


Figura 2.1: Fluxo de água movendo-se na direção x , através de uma tela de área A , em que vetor \vec{A} é perpendicular à tela.

Uma forma mais simples de expressar o fluxo é considerar a tela definida pelo vetor \vec{A} , como mostra a Fig. 2.1. Como $\vec{v} \cdot \vec{A} = v \cdot A \cos(\theta)$, é possível escrever o fluxo de água como sendo o produto escalar dos dois vetores,

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} \text{ [m}^3/\text{s]}. \quad (2.3)$$

Para o caso mais geral, em que um campo vetorial não homogêneo atravessa uma superfície qualquer, torna-se necessário lançar mão da integração para o cálculo do fluxo. Considerando um campo vetorial com qualquer orientação no espaço, \vec{v} , como na Fig. 2.2(a) no qual se associa a cada ponto do espaço um vetor, é possível computar o fluxo em um ponto qualquer, colocando uma pequena superfície plana naquele ponto e somando somente o número de vetores que realmente atravessam essa superfície, furando-a de um lado para outro. Como o fluxo depende do ângulo relativo entre o campo vetorial e a superfície é preciso relembrar que uma superfície é definida por um vetor ortogonal ao plano tangente à superfície em cada ponto.

No caso de um campo não constante, através de uma superfície qualquer, como o da Fig. 2.2(b) divide-se a superfície em elementos de área ΔA equivalentes a planos, nos quais o campo vetorial possa ser considerado constante e o fluxo através dessa pequena área, será

$$\Delta\Phi = (\vec{v} \cdot \hat{n})\Delta A. \quad (2.4)$$

O fluxo total será o somatório a todos os n elementos:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Delta\Phi \simeq \sum_{i=1}^n (\vec{v} \cdot \hat{n})\Delta A. \quad (2.5)$$

Para um número muito grande de malhas $n \rightarrow \infty$, as áreas serão elementares

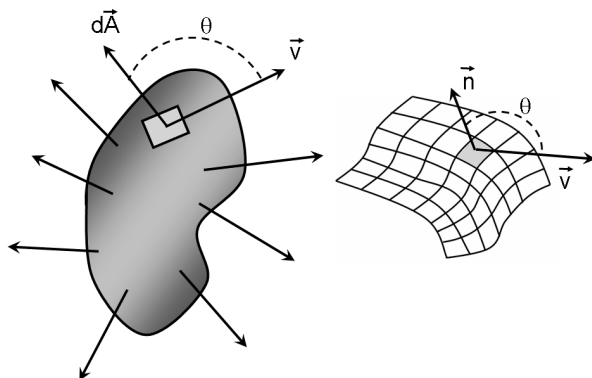


Figura 2.2: Fluxo do vetor \vec{v} , com qualquer orientação no espaço, através de uma superfície qualquer, onde o vetor $d\vec{A}$ é perpendicular à superfície, com direção \hat{n} .

e o somatório corresponderá a uma integral de superfície, assim definida,

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (2.6)$$

O símbolo de integral com limite "S" indica que a integração será feita em toda a superfície S (integral dupla) em que o vetor diferencial de área $d\vec{A}$, foi definido como um vetor de direção normal à superfície com módulo igual a dA :

$$d\vec{A} = \hat{n}dA. \quad (2.7)$$

O cálculo do fluxo utilizando a equação 2.6 é uma definição geral de fluxo para um campo vetorial qualquer, através de uma superfície também qualquer. Desta maneira é possível estender a definição de fluxo, ao campo elétrico, denominando-o de fluxo elétrico:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (2.8)$$

Existe uma grande diferença entre o conceito do fluxo de um fluido, como a água, e o fluxo do campo elétrico pois no primeiro o fluxo é de partículas de água que se movem através da superfície, enquanto que no segundo o campo elétrico não possui um movimento associado ao mesmo a menos que se utilizem partículas com carga elétrica, como sensores de campo. Dessa maneira se considera que o fluxo do campo elétrico é medido pelo

número N , de linhas Considerando que atravessam uma superfície normal, às mesmas, de área A . Portanto pode-se dizer que o **fluxo elétrico através de uma superfície é proporcional ao número de linhas de campo elétrico que atravessam a superfície considerada.**

O fluxo de vetores como o campo elétrico \vec{E} é definido para um campo que atravessa uma superfície definida em um determinado ponto do espaço pelo versor normal \hat{n} , como é mostrado na Fig. 2.2(b). Uma superfície aberta possui dois vetores normais; dependendo do versor escolhido, calcula-se o fluxo em um dado sentido. Para superfícies fechadas ou gaussianas o versor, por convenção, aponta para o exterior de tal maneira que o fluxo calculado sempre será o fluxo para fora da superfície.

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

2.2.1 Fluxo Elétrico criado por Carga Puntiforme

O fluxo do vetor campo elétrico criado por uma carga puntiforme e positiva q , situada na origem do sistema de coordenadas, é calculado através de uma superfície circular de raio R paralela ao plano xx , cujo centro está no eixo z a uma distância Z do centro do sistema de coordenadas. A carga e a superfície estão representadas na Fig. 2.3. Como existe uma simetria em torno do eixo z , é conveniente utilizar um sistema de coordenadas cilíndricas. Para o cálculo do fluxo, divide-se a superfície em elementos, dA cujos lados são dr e $r d\theta$, sendo $dA = r d\theta dr$. Cada um dos elementos é caracterizado por um versor, que no caso possui a mesma direção do eixo z com versor \hat{k} ,

$$d\vec{A} = r d\theta dr \hat{k}. \quad (2.10)$$

O campo elétrico poderá então ser escrito como,

$$\vec{E}_p = kq \frac{(\vec{r}'_p)}{|\vec{r}'_p|^3}, \quad (2.11)$$

em que o vetor posição do ponto P é definida por

$$\vec{r}'_p = \vec{r} + z\hat{k} \quad (2.12)$$

e o campo elétrico tomará a forma,

$$\vec{E}_p = kq \frac{(\vec{r} + z\hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.13)$$

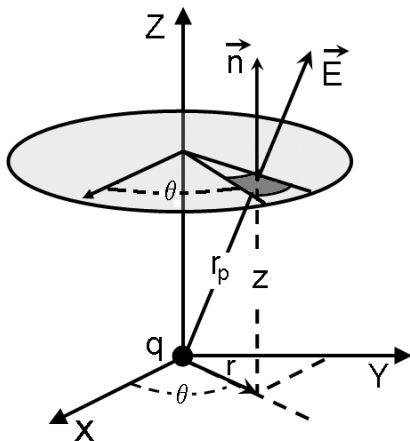


Figura 2.3: Fluxo do campo elétrico criado por uma carga elétrica puntiforme através de uma superfície em forma de disco.

O fluxo através da superfície será dado por

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^R \int_0^{2\pi} kq \frac{(\vec{r} + z\hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (rd\theta dr \hat{k}), \quad (2.14)$$

em que integração em θ é imediata. Restando a indicação de alguns passos da integração em r , após realizar o produto escalar,

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \int_0^R kq 2\pi \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr, \\ &= 2\pi kqz \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr, \\ &= -2\pi kqz \left[\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$= 2\pi kqz \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.16)$$

A equação 2.16 pode ser escrita de uma forma mais simples, o que permitirá a análise de algumas de suas características,

$$\Phi_E = 2\pi kq \left[1 - \frac{1}{\{1 + (\frac{R}{z})^2\}^{1/2}} \right]. \quad (2.17)$$

Para o limite de $R \rightarrow 0$, o fluxo tende a zero, pois a superfície nesse caso será nula. Para $Z \rightarrow \infty$ o fluxo também será nulo, pois o campo elétrico diminui com o quadrado da distância. Mas o fato mais interessante é a dependência do fluxo em função de $\frac{R}{z}$; pois o mesmo se manterá constante dentro de um cone, cujo vértice é a carga, para qualquer distância na qual se mantenha constante a razão $\frac{R}{z}$. Este fato pode ser observado na geometria da Fig. 2.4, na qual se observa que todas as superfícies dentro desse cone serão, sempre, atravessadas pelo mesmo número de linhas de campo.

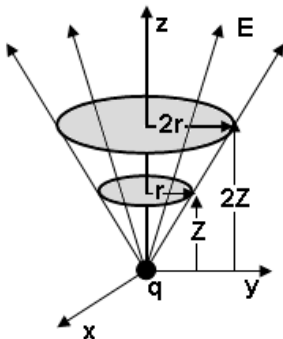


Figura 2.4: O fluxo através de duas superfícies paralelas que mantém a mesma razão R/Z , é o mesmo, pois estão dentro do mesmo ângulo sólido.

2.3 Lei de Gauss

Na Fig. 2.5 mostra-se a geometria para o cálculo do fluxo do vetor campo elétrico através de uma superfície esférica de raio r , produzido por uma carga pontual colocada no centro da gaussiana.

Sabemos que o valor do campo elétrico em todos os pontos da superfície gaussiana esférica, de raio r , é dada por:

$$\vec{E}_r = k \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.18)$$

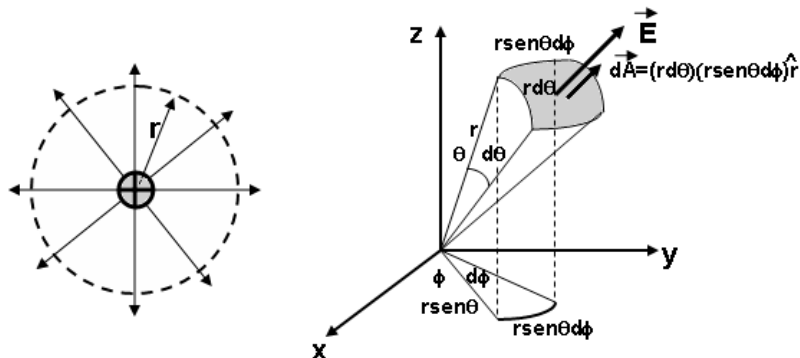


Figura 2.5: Geometria para o cálculo do fluxo produzido por uma carga pontual, através de uma superfície $d\vec{A}$.

O fluxo total através da superfície esférica é dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \tag{2.19}$$

O produto escalar pode ser simplificado já que os \vec{E} e $d\vec{A}$ são paralelos e o integrando pode ser escrito como,

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos 0 = k \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \tag{2.20}$$

O fluxo do campo elétrico pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = kq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi. \tag{2.21}$$

$$\Phi = kq \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta [\phi]_0^\pi = 2\pi kq [\cos \theta]_0^\pi \tag{2.22}$$

e o valor desta integral será:

$$\Phi = 4\pi kq \tag{2.23}$$

e como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_o},$$

resulta

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_o}. \tag{2.24}$$

Esta Eq. 2.24 é a *Lei de Gauss*, na qual a constante $4\pi k$ também costuma ser definida como o inverso da permissividade elétrica no vácuo $1/\epsilon_0$.

No caso da superfície fechada envolver um conjunto de n cargas pontuais, $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$, o fluxo devido a essas cargas, aplicando o princípio da superposição, será dado por:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k \sum_{i=1}^n q_i. \quad (2.25)$$

Um número infinito de cargas corresponde a uma distribuição contínua de cargas no interior da superfície fechada cujo somatório será, então, uma integral no volume limitado pela superfície gaussiana:

$$\Phi_E = 4\pi k \int_V dq, \quad (2.26)$$

$$= 4\pi k \int_V \rho dV, \quad (2.27)$$

$$= 4\pi k q_{int}, \quad (2.28)$$

em que q_{int} , representa a carga total no interior da superfície fechada.

Exemplo 2.1

Cálculo do fluxo elétrico através de superfícies gaussianas, como mostrado na Fig. 2.6:(a) um cubo de lado a contendo uma carga Q no seu interior; (b) Uma esfera de raio R contendo uma carga $-Q$ no seu interior, uniformemente distribuída sobre o plano equatorial da esfera; (c) uma esfera de raio R com um dipolo elétrico no seu interior.

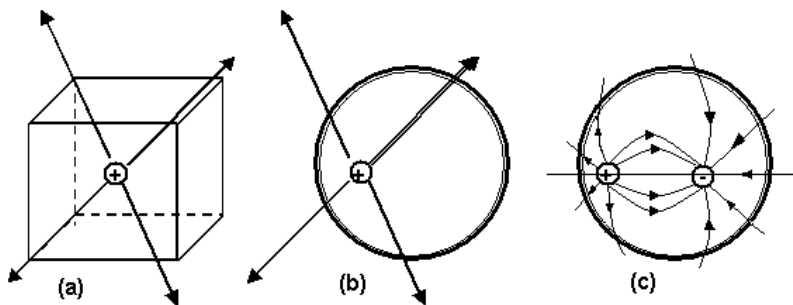


Figura 2.6: Superfícies gaussianas para o exemplo 2.1,

Solução

Neste exercício não é necessário fazer nenhuma integração, pois o fluxo elétrico pode ser obtido, apenas verificando qual a carga existente no interior da superfície gaussiana, pois de forma resumida a Lei de Gauss, diz que

$$\Phi_E = 4\pi k q_{int}.$$

Bastando então para calcular do fluxo, através da gaussiana, obter o valor da carga a carga no interior da mesma.

(a) No caso do cubo, não importa a localização da carga, se ela estiver no interior da gaussiana o fluxo será: $\Phi_E = 4\pi k Q$.

(b) Da mesma maneira do item (a), basta saber o valor da carga no interior da esfera e o fluxo será: $\Phi_E = 4\pi k Q$.

(c) No caso do dipolo, a carga no interior é nula e portanto o fluxo também o será.

Exemplo 2.2

Cálculo do Campo Elétrico a uma distância Y de uma distribuição linear e infinita de carga com densidade λ .

Solução

Para o cálculo do campo elétrico, em um ponto situado a uma distância Y de um condutor retilíneo, constrói-se uma superfície gaussiana, como a superfície externa de um cilindro de comprimento finito, que contenha no seu eixo o condutor, como mostra a Fig. 2.7.

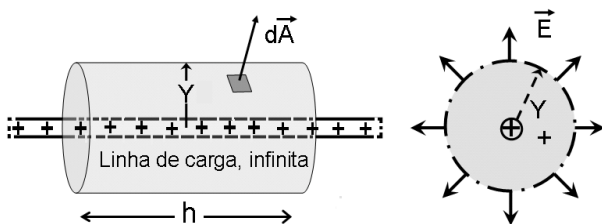


Figura 2.7: Superfície gaussiana cilíndrica, contendo uma linha de carga infinita no seu eixo, com distribuição linear e uniforme de carga elétrica positiva.

A aplicação da lei de Gauss é feita em duas etapas: na primeira, calcula-se o fluxo através da gaussiana e na segunda calcula-se a carga existente no interior da mesma.

Como nos mostra a Fig. 2.7, o campo elétrico, é normal à superfície cilíndrica, portanto a normal à superfície tem a mesma direção do campo. Nas bases dos cilindros, os dois vetores formam um ângulo de 90° . O fluxo elétrico, será então:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA + 0.$$

Como a área lateral do cilindro é $A = 2\pi Yh$, em que h é a altura e Y o raio do cilindro, o fluxo será

$$\Phi_E = E2\pi Yh.$$

A carga no interior do cilindro, q_{int} é calculada por,

$$q_{int} = \lambda h,$$

portanto,

$$E2\pi Yh = 4\pi k\lambda h$$

$$E = \frac{2k\lambda}{Y},$$

que é uma solução idêntica á obtida com aplicação da lei de coulomb para carga distribuída.

Exemplo 2.3

Cálculo do Campo Elétrico a uma distância h de um plano de carga infinito com densidade de carga σ .

Solução

Pela simetria da distribuição de carga, consideram-se as linhas de campo como retas perpendiculares ao plano e equidistantes. Dessa maneira o fluxo será constante sobre qualquer superfície paralela ao plano e zero para qualquer superfície normal. Por isso, considerou-se uma superfície gaussiana, cilíndrica reta, cujas bases são paralelas ao plano de carga, com raio qualquer e altura h , conforme nos mostra a Fig. 2.8. O Fluxo será então,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA + 0.$$

Como a área das bases do cilindro é $A = \pi r^2$, o fluxo será

$$\Phi_E = 2E\pi r^2.$$

A carga no interior da superfície será igual à densidade de carga superficial vezes a área circular de intersecção da gaussiana com o plano de carga,

$$q_{int} = \sigma\pi r^2,$$

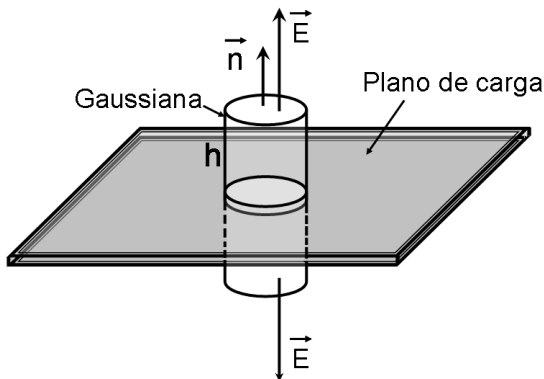


Figura 2.8: Superfície gaussiana, cilíndrica para um plano infinito com carga superficial uniformemente distribuída.

portanto,

$$2E\pi r^2 = 4\pi k\sigma\pi r^2,$$

e o campo elétrico será,

$$E = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Como consequência, se observa que o campo elétrico é constante e independente de distância do ponto ao plano da carga.

Exemplo 2.4

Cálculo do Campo Elétrico a uma distância r do centro de uma distribuição esférica de carga com densidade ρ e raio externo R , e carga total q .

Solução

A gaussiana, devido à simetria do problema, só pode ser esférica com raio r maior ou menor do que R dependendo do ponto escolhido para o cálculo do campo estar dentro ou fora da mesma, conforme mostra a Fig. 2.9. Para os dois casos o fluxo, considerando o campo como radial ou seja paralelo ao versor da superfície gaussiana, será dado por,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E4\pi r^2.$$

Para o caso do ponto estar localizado fora da esfera ($r > R$), a carga no interior será dada por

$$q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3,$$

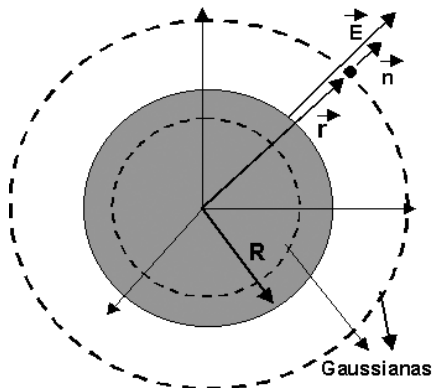


Figura 2.9: Gaussiana esférica, contendo uma distribuição uniforme de carga também esférica.

portanto a lei de Gauss será,

$$E4\pi r^2 = 4\pi k\rho \frac{4}{3}\pi R^3,$$

e o campo elétrico, nos pontos fora esfera, será

$$E = \rho \frac{4}{3r^2}\pi R^3 = k \frac{q}{r^2}.$$

Para o interior da esfera, ($r < R$), a carga no interior da gaussiana é dada por,

$$q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,$$

portanto a lei de Gauss será

$$E4\pi r^2 = 4\pi k\rho \frac{4}{3}\pi r^3,$$

e o campo nesse caso será dado por

$$E = \frac{4}{3}\pi k\rho r = \frac{kq}{R^3}r.$$

As duas expressões para o campo elétrico, dentro e fora da esfera, podem ser representadas graficamente como na Fig. 2.10.

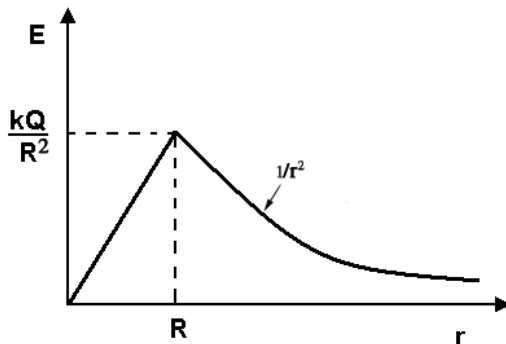


Figura 2.10: Funções para o campo elétrico, no interior e no exterior de uma esfera de carga, com distribuição volumétrica, uniformemente distribuída.

2.4 Aplicação da Lei de Gauss a um Condutor

Considerando um condutor em equilíbrio eletrostático como o da Fig. 2.11:

Um condutor eletricamente carregado e em equilíbrio eletrostático possui um campo nulo no seu interior. Esse fato poderá ser comprovado pela inexistência de corrente elétrica. A consequência do campo ser nulo é que o fluxo sobre qualquer gaussiana no interior do condutor é nulo. Como consequência, a carga em excesso só pode estar na superfície do condutor. A Fig. 2.11 nos mostra o fluxo, através de superfícies gaussianas dentro e fora do condutor. O campo elétrico produzido pelas cargas na superfície do corpo será formada de vetores normais à superfície externa do corpo, permitindo dizer que dessa maneira se mantém a condição de equilíbrio eletrostático.

2.5 Consequências Tecnológicas da Lei de Gauss

A lei de Gauss permite resolver problemas físicos com grande facilidade, especialmente aqueles nos quais se conhece a simetria do campo elétrico ou da distribuição de carga. A nossa derivação é válida somente para campos elétricos criados por distribuição estática de carga. Uma aplicação muito interessante da Lei de Gauss é o *teorema de Earnshaw* que nos diz que é impossível estabelecer o equilíbrio estático sob influência única de forças eletrostáticas. Um corolário do teorema de Earnshaw nos diz que a eletrostática clássica não pode ser responsável pela estabilidade de átomos e moléculas.

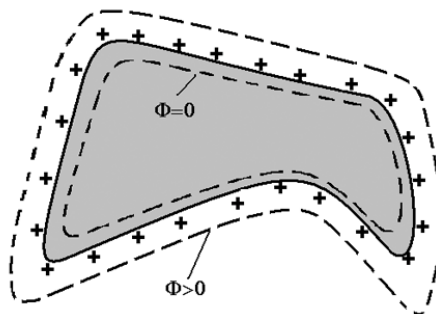


Figura 2.11: Fluxo em superfícies internas e externas de gaussianas simétricas a um condutor elétrico com excesso de carga em equilíbrio eletrostático.

Por outro lado o fato de não existir campo elétrico no interior de cavidades em corpos metálicos possui muitas aplicações práticas. Uma delas é a *Gaiola de Faraday*, cuja aplicação prática é feita na construção de experimentos ou equipamentos aos quais se aplicam técnicas, obrigatoriamente, sem a presença de campo elétrico. Uma outra aplicação da gaiola de Faraday é o uso do **cabo coaxial**, no qual a malha externa, aterrada produz um espaço livre de campo elétrico permitindo a transmissão de sinais elétricos sem interferência externa. São tantas as aplicações científicas e tecnológicas da eletrostática, algumas das quais descrevemos no primeiro capítulo destas notas, que apenas nos resta avançar um pouco mais na teoria eletrostática, utilizando a Lei de Gauss na forma diferencial que certamente nos ajudará a entender muitas dessas aplicações.

2.6 Lei de Gauss na Forma Diferencial

O estudo do campo elétrico, na forma diferencial, como já feita em vários exercícios, mostra que é possível localizar as cargas elétricas, pela forma espacial das linhas de campo elétrico. Nesse aspecto, o estudo da Lei de Gauss, na forma integral só torna claro a localização da carga quando se utiliza uma gaussiana no limite da carga. Se uma superfície gaussiana envolvendo uma região do espaço é atravessada por um fluxo elétrico não nulo, dentro dessa superfície existe carga elétrica. O limite volumétrico de uma gaussiana pode ser feito até ao volume elementar que contenha um ponto e dessa maneira localizando cargas com grande precisão. Observando campos elétricos desta forma, por exemplo, na Fig. 1.8 pode-se decidir pela posição das cargas elétricas.

Dessa maneira, aplicando a lei de Gauss pode-se verificar a existência de uma carga q , como uma propriedade local do ponto P:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.29)$$

Considerando que a carga seja definida dentro do volume elementar ΔV , o fluxo será:

$$\frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}, \quad (2.30)$$

em que ρ é a densidade local de carga elétrica, em torno do ponto P. Utilizando o conceito de fluxo elétrico poder-se-á chegar à característica local do campo elétrico da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}. \quad (2.31)$$

O conceito de divergente de um vetor pode então ser aplicado ao campo elétrico:

$$\text{div} \vec{E}_{(P)} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \right), \quad (2.32)$$

Esta expressão leva facilmente à equação de Poisson da eletrostática, que também é conhecida como a forma local da lei de Gauss:

$$\text{div} \vec{E}_{(P)} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.33)$$

Quando se expressa a lei de Gauss na forma diferencial, a carga vem a ser o divergente do campo elétrico. Em coordenadas cartesianas o $\text{div} \vec{E}$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (2.34)$$

e a equação de Gauss, na forma diferencial, toma a forma da equação de Poisson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.35)$$

Na Fig. 2.12 se observam quatro diferentes campos, no primeiro (a) a divergência é nula, pois as linhas são paralelas, portanto a carga não se localiza no domínio desse campo, enquanto que no caso (b) a divergência é positiva, existindo uma carga positiva na origem. No caso (c) não se observa a existência de divergência, portanto no espaço definido não existe carga elétrica, no caso (d) existe divergência positiva, mas resta discutir em termos do rotacional do campo para verificar se este tipo de campo pode representar um campo elétrico produzido por carga estática.

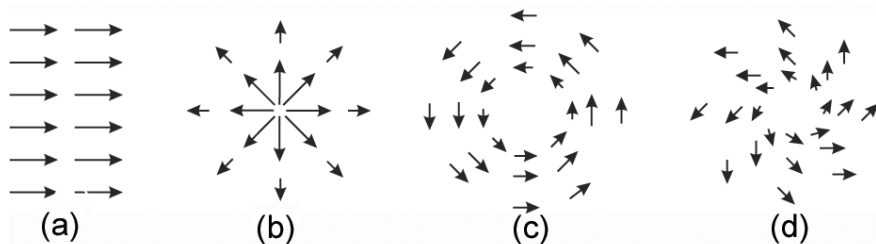


Figura 2.12: Divergência de campos de força e o valor do $div\vec{E}$: (a)= 0, (b)> 0, (c)= 0, (d)> 0.

2.6.1 Equação de Poisson aplicada a uma carga pontual

Considerando que o campo elétrico produzido por uma carga colocada na origem do sistema de referência produz um campo em um ponto \vec{r} qualquer, dado pela lei de Coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.36}$$

Analisando a definição da equação de Poisson, se observa que para $r \neq 0$ $div\vec{E} = 0$, pois se trata de espaço livre de cargas. Vamos verificar esse fato calculando o divergente do campo elétrico Eq. 2.36 para uma direção qualquer x :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} \tag{2.37}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \tag{2.38}$$

Como $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{x}{r} \tag{2.39}$$

e portanto

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right). \tag{2.40}$$

De forma análoga pode-se obter as derivadas para as outras direções y e z , portanto:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0, \text{ cqd.} \tag{2.41}$$

2.7 Questões, Exercícios e Problemas

1. Utilizando a lógica de aplicação da lei de Gauss mostre que as linhas de campo elétrico devem ser contínuas e devem se originar ou terminar nas cargas elétricas.
2. No caso do vetor campo elétrico ser nulo sobre uma superfície fechada, o que pode concluir em relação à carga contida no interior dessa superfície?
3. Quando em uma região em que o campo elétrico é homogêneo, com linhas de campo paralelas; a) pode-se afirmar que não existe carga nessa região? b) analise a sua resposta utilizando a equação de Poisson.
4. Quando uma bolha de sabão recebe uma carga elétrica ela se distribui na sua superfície como se fosse um corpo condutor. a) Faça uma análise do balanço de forças na superfície da bolha; b) como consequência o que acontecerá em relação às dimensões da bolha?
5. Considerando, um condutor linear infinito, carregado com uma densidade de carga $\lambda = 5 \text{ nC/m}$, qual será o fluxo elétrico que atravessa, uma superfície cilíndrica de raio R e comprimento 1 m que envolve o condutor?
6. Supondo-se que uma superfície infinita está eletricamente carregada com carga positiva, com uma densidade uniforme de $\sigma = 3 \text{ nC/m}^2$, calcule o valor do fluxo produzido a uma distância de 3 cm da placa.
7. Supondo duas placas paralelas e infinitas, a uma distância d uma da outra, faça uma análise qualitativa e quantitativa do campo elétrico, entre as placas e fora das mesmas: a) quando as duas placas possuem carga de mesmo sinal; b) quando as placas possuem cargas de sinais contrários.
8. Uma esfera de raio R possui uma distribuição uniforme de carga elétrica $\rho \text{ C/m}^3$ em todo o seu volume, mais uma carga elétrica Q puntiforme colocada no seu centro. Qual o valor do fluxo elétrico que atravessa a superfície externa da esfera?
9. Uma esfera de raio R , oca com um raio interno $R/2$, possui uma distribuição uniforme de carga, com densidade $\rho \text{ C/m}^3$. Obtenha a expressão para o campo elétrico ao longo da dimensão radial no domínio $(0, \infty)$. Faça um gráfico de $E(r)$.
10. Uma esfera condutora de raio 5 cm isolada e carregada com uma carga de 3 mC produz um campo elétrico. Calcule o valor desse campo no

interior da esfera e fora da mesma, em função da distância ao seu centro. Faça um gráfico dessa função.

11. Uma casca esférica possui uma distribuição uniforme de carga; (a) utilize a lei de Gauss para demonstrar, utilizando as condições de simetria, que o campo no interior da casca é nulo quando a casca é metálica ou não; (b) demonstre também que o campo no exterior da casca pode ser calculado, considerando a carga total como se fosse concentrada no centro da casca.
12. Considerando a existência de um campo elétrico médio sobre a superfície da terra da ordem de 100 N/C , apontando para o centro da terra (devido a uma carga negativa), calcule a carga total no volume da terra.

Alessandro Volta construiu as primeiras pilhas químicas no final do século XVIII e em 1801 demonstrou o funcionamento das pilhas a Napoleão Bonaparte que o condecorou com o título de conde...

3.1 Trabalho e Energia

Os campos de forças centrais são do tipo conservativo, permitindo a sua descrição por uma função escalar denominada função potencial. Por isso torna-se importante revisar os conceitos envolvidos com os campos de força conservativos. O trabalho realizado por uma força \vec{F} entre dois pontos de sua trajetória mostrada na Fig. 3.1,

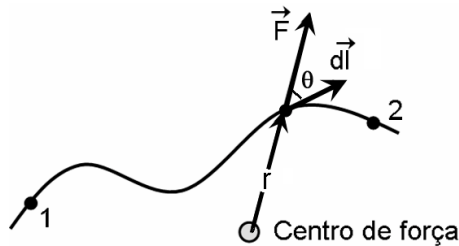


Figura 3.1: Elemento de trajetória $d\vec{l}$ de uma força \vec{F} em relação ao do centro de forças, \vec{r} .

é dado por:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (3.1)$$

Como as forças conservativas são do tipo central, podem ser escritas na forma:

$$\vec{F} = |\vec{F}|\hat{r}, \quad (3.2)$$

onde \hat{r} é a direção da interação ou direção ao centro de forças. O trabalho para deslocar a força do ponto 1 ao 2 poderá então ser escrito como:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 |\vec{F}|\hat{r} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 |\vec{F}|dl \cos\theta = \int_{r_1}^{r_2} |\vec{F}|dr. \quad (3.3)$$

Como se pode verificar esta integral é independente da trajetória para ir do ponto inicial ao final. Dessa forma é possível definir uma função denominada **Energia Potencial U** característica de cada ponto do espaço,

$$U_2 - U_1 = -W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{r_1}^{r_2} |\vec{F}|dr. \quad (3.4)$$

Como a energia total do sistema é sempre conservada pode-se dizer que a variação da energia potencial, entre o ponto inicial e final da trajetória, deve ser idêntica à variação da energia cinética:

$$E_{c2} - E_{c1} = -(U_2 + U_1) \quad (3.5)$$

3.2 Energia Potencial Eletrostática

O trabalho necessário para estabelecer uma dada distribuição de cargas elétricas no espaço é igual à energia potencial elétrica, resultante da soma de todas as interações entre os pares de cargas. De maneira análoga ao campo gravitacional define-se a energia potencial entre dois pontos de uma região, na qual se estabeleceu um campo elétrico, através do trabalho realizado pelo campo sobre uma carga:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(U_f - U_i). \quad (3.6)$$

Uma carga elétrica positiva colocada em um campo elétrico \vec{E} , sob a ação da força $q\vec{E}$, é acelerada na direção do campo elétrico adquirindo energia

cinética. Nesse caso a energia potencial do ponto inicial é maior do que a do ponto final e a variação da energia potencial é negativa pois a carga se movimenta de uma região de maior para uma de menor energia potencial. Se no ponto inicial se aplica uma força externa, fazendo com que o corpo se desloque na direção contrária ao campo elétrico, pode-se, ao contrário, levar a carga de uma região de potencial menor para uma de maior. Dessa maneira se observa que a variação de energia potencial tem sempre sinal contrário ao da variação do trabalho. Um campo de forças centrais, como o campo elétrico, é dito conservativo, pois o trabalho realizado por um campo elétrico sobre uma carga elétrica é independente do seu percurso.

Utilizando o campo elétrico, produzido por uma carga Q pontual, no qual se move uma carga elétrica de prova, q_o , conforme mostra a Fig. 3.2, calcula-se o trabalho para realizar uma trajetória, qualquer 1 – 2, da seguinte forma:

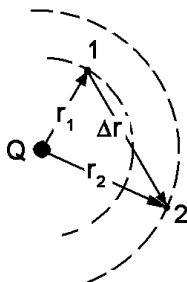


Figura 3.2: Trajetória de uma carga entre os pontos 1 e 2, e localização do centro de forças.

$$W_{1 \rightarrow 2} = q_o \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_o \int_1^2 k \frac{Q dr}{r^2} = -k q_o Q \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]. \quad (3.7)$$

Como já se observou, o trabalho para deslocar a carga não depende da trajetória, o que nos indica que o campo elétrico é conservativo. Dessa forma é possível definir a energia potencial elétrica gerada pela carga, Q em um ponto qualquer do espaço, utilizando-se a mesma ideia apresentada na equação 3.4, como

$$V_1 - V_2 = \frac{U_1}{q_o} - \frac{U_2}{q_o} = -kQ \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] = kQ \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]. \quad (3.8)$$

3.3 Potencial Elétrico

A expressão Eq. 3.8 mostra que, para uma dada distribuição de carga que gera um campo elétrico, a diferença de energia potencial elétrica entre dois pontos depende do próprio campo elétrico e do valor da carga elétrica à qual está associada essa energia.

Existe, portanto, a necessidade de definir uma grandeza que contenha informação sobre a distribuição de cargas que gera o campo. Para isso define-se o **potencial elétrico**, como sendo a energia potencial por unidade de carga, portanto,

$$V = \frac{U}{q_o}. \quad (3.9)$$

A diferença de potencial elétrico entre quaisquer pontos, inicial e final, da trajetória será então dada por:

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (3.10)$$

O potencial elétrico é dado em volts (V) em homenagem a *Alessandro Volta*, unidade do sistema Sistema Internacional de medidas,

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N} \times \text{m}}{\text{C}}.$$

Utilizando a unidade volt, é possível definir uma unidade de energia extremamente útil o $e\text{V}$, definida como sendo a energia adquirida por uma partícula com carga "e" elementar, quando acelerada por um potencial de 1 volt:

$$1e\text{V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{C} \times 1 \text{ V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{J}.$$

No caso do campo produzido por uma carga pontual q , colocada na origem do sistema, a equação 3.10 poderá ser escrita como:

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_i^f \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right). \quad (3.11)$$

Para a definição de potencial, associado a um ponto do espaço, é necessário escolher um potencial de referência de forma arbitrária. No caso do campo gerado por uma carga pontual, é conveniente escolher o potencial de referência para $r \rightarrow \infty$ como sendo

$$V_\infty = 0.$$

Dessa forma é possível definir o potencial criado por uma carga pontual q , em um dado ponto "r" do espaço, como

$$V_{(r)} = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.12)$$

É importante considerar que a escolha do potencial de referência depende da distribuição espacial de carga e quando a distribuição se estender ao infinito o potencial do mesmo não poderá ser considerado com nulo.

3.3.1 Superfícies Equipotenciais e Linhas de Campo

Os pontos do espaço nos quais o potencial é constante formam, conforme o caso, uma superfície, um volume ou uma linha equipotencial. No caso dos condutores em equilíbrio eletrostático, o volume dos mesmos é equipotencial.

Quando uma carga elétrica, de prova, é deslocada em um campo elétrico e todos os pontos dessa trajetória têm a mesma energia potencial, essa trajetória será uma linha equipotencial. As superfícies concêntricas a uma carga pontual formam uma superfície equipotencial. O fato de que o campo elétrico e as superfícies equipotenciais sejam ortogonais, facilita a sua construção gráfica.

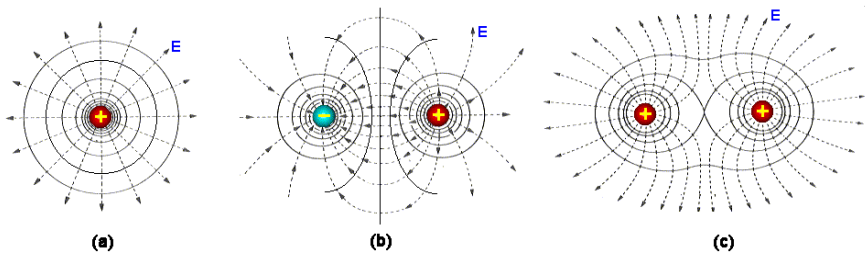


Figura 3.3: Traços das superfícies equipotenciais para diferentes distribuições de carga; (a) carga pontual; (b) dipolo; (c) monopolo de duas cargas positivas.

Na Fig. 3.3 pode-se examinar os traços das superfícies equipotenciais de diferentes conformações de campo elétrico. Para duas linhas equipotenciais que tenham uma diferença de potencial dV , distanciadas uma da outra por uma distância ds , a taxa de variação do potencial, na direção perpendicular à superfície equipotencial em um dado ponto, é dada por:

$$E = - \frac{dV}{ds}, \quad (3.13)$$

e dessa maneira pode-se dizer que: **o campo elétrico aponta na direção em que a distância entre duas linhas equipotenciais é mínima e essa é a direção do gradiente da função potencial, conforme nos mostra a Fig. 3.4.**

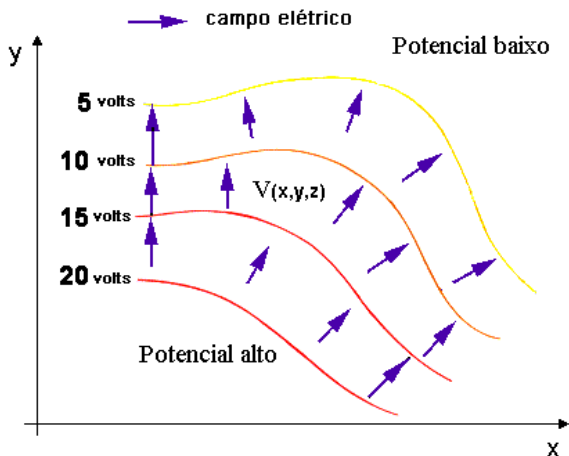


Figura 3.4: Relação entre as linhas equipotenciais e os vetores campo elétrico

3.4 Cálculo do Potencial Elétrico

O potencial elétrico, resultante de uma distribuição de cargas, é um somatório de escalares, consequência do princípio da superposição. No caso de cargas pontuais, a soma é discreta, enquanto que no caso de cargas distribuídas, a soma é contínua, ou seja uma integral dos potenciais diferenciais.

3.4.1 Potencial criado por Cargas Pontuais

Para o cálculo do potencial produzido por uma distribuição de carga pontuais o princípio da superposição se aplica diretamente resultando na soma dos potenciais gerados por cada carga,

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{r_i}, \quad (3.14)$$

onde a carga q_i é localizada, em relação ao ponto onde se quer calcular o potencial, pelo vetor \vec{r}_i .

Exemplo 3.1

Potencial produzido por um dipolo elétrico em um ponto qualquer do espaço.

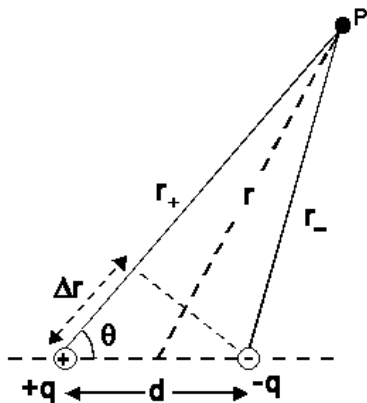
Solução

Figura 3.5: Geometria para cálculo do potencial no ponto P devido ao dipolo elétrico de momento $p = qd$.

Aplicando o princípio da superposição em um ponto P qualquer do espaço, no entorno do dipolo como mostra a Fig. 3.5, resulta que o potencial V_P nesse ponto será:

$$V_P = V_+ + V_- = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = kq \frac{r_+ - r_-}{r_+ r_-} = kq \frac{\Delta r}{r^2},$$

pois de acordo com a Fig. 3.5 a diferença $\Delta r = r_+ - r_-$. Para pontos distantes do dipolo se verifica que $r_+, r_- \simeq r$. Considerando o triângulo com hipotenusa d , se observa a relação, $\Delta r = d \cos \theta$, portanto o potencial poderá ser calculado por:

$$V_p \simeq \frac{kpcos\theta}{r^2},$$

em que $p = qd$ é o momento de dipolo, um vetor cuja direção é sempre da carga negativa para a positiva. Com este exemplo, é possível concluir que a função potencial do dipolo decresce mais rapidamente ($1/r^2$) do que o da carga puntiforme, ($1/r$).

3.4.2 Potencial criado por Cargas Distribuídas

Para distribuições contínuas de carga o somatório pode ser generalizado para uma integral dos potenciais produzidos por cargas elementares da

seguinte forma:

$$V_{(P)} = k \int \frac{dq}{r}, \quad (3.15)$$

onde a carga é distribuída em um volume, em uma superfície ou em uma linha, definida pelo elemento infinitesimal de carga, dq , para cada tipo de distribuição da mesma forma que o foi para o estudo do campo elétrico:

$$dq = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dS \\ \lambda dl, \end{cases}$$

onde ρ , σ e λ , representam, respectivamente, as densidades, volumétrica, superficial e linear da distribuição contínua de carga. Nestas notas, em geral, se consideram distribuições homogêneas em um dado domínio da função distribuição de carga no qual a sua densidade é considerada constante.

Exemplo 3.2

Cálculo da função potencial para um campo produzido por uma linha de carga, em um ponto qualquer a uma distância r da linha conforme mostra a Fig. 3.6.

Solução

Considerando que o problema da linha de carga elétrica (fio condutor), carregado com uma densidade de carga, λ , com dimensões infinitas, conforme a geometria mostrada na Fig. 3.6, o campo elétrico, produzido por esta distribuição de carga, já é bem conhecido, parte-se da expressão desse campo, que é radial, para o cálculo do potencial elétrico.

A Fig. 3.6 nos ajudará a entender a solução, mostrando os vetores, campo e deslocamento. A equação 3.10 pode ser escrita, utilizando o campo elétrico dado por $E_r = 2k\lambda/r$:

$$\Delta V = - \int E_r dr = 2k\lambda \int \frac{dr}{r}.$$

A diferença de potencial depende dos pontos inicial e final da integração e considerando o potencial de referência como nulo, de forma arbitrária, em algum ponto $r = R$ chega-se a:

$$\Delta V = V_r - V_R = V_r = 2k\lambda \int_R^r \frac{dr}{r} = -2k\lambda \ln r \Big|_R^r,$$

$$V_r = 2\lambda k \ln \left(\frac{r}{R} \right).$$

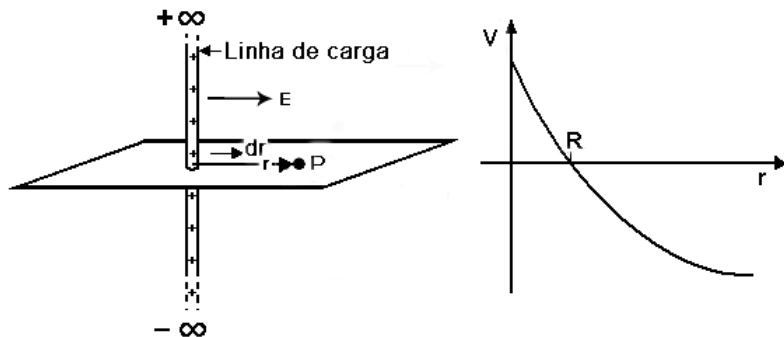


Figura 3.6: Geometria para o cálculo do potencial em um ponto P qualquer, criado por uma linha de carga infinita, ao lado função potencial, solução obtida neste problema.

É importante relembrar que o potencial criado pela linha de carga, ao contrário do da carga pontual e do dipolo, não pode ser considerado como nulo no infinito pois a linha de carga atinge o infinito.

Exemplo 3.3

Cálculo da função potencial criada por um anel de carga.

Solução

Para a solução deste problema utiliza-se a mesma geometria da Fig. 1.14. O potencial gerado por um elemento de carga dq , no ponto P é dado por:

$$dV_P = k \int \frac{dq}{|\vec{r}'' - \vec{r}'''|}$$

Como a distância $|\vec{r}'' - \vec{r}'''| = b$, é constante para todos os elementos de carga, no anel, variando apenas a sua direção, para referencia-la, pode-se utilizar os parâmetros $r'' = r$ e $r' = z$, respectivamente, o raio do anel e a distância do centro do anel ao ponto P. O potencial será dado pela seguinte integral:

$$V_P = \frac{k}{b} \int dq = \frac{kq}{b} = k \frac{q}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Para $r \ll z$,

$$V_P \simeq \frac{kq}{z}$$

Isso mostra que o anel, sendo um monopolo, tem o seu potencial calculado da mesma forma como o de uma carga pontual, como se a carga do anel estivesse

totalmente localizada no centro do anel.

Exemplo 3.4

Cálculo da função potencial criada por um disco de carga, com raio R , em um ponto P localizado a uma distância z do centro do mesmo.

Solução

Para um disco de raio R no qual uma carga q está uniformemente distribuída na sua superfície, utiliza-se como referência a mesma Fig. 1.14, onde o anel limita a superfície do disco utilizando os mesmos parâmetros definidos no exemplo anterior. Neste caso a distribuição de carga é superficial e o elemento de carga é dado por,

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr,$$

na qual o raio r é definido no intervalo $\{0; R\}$. O mesmo potencial obtido no exemplo do anel pode ser considerado como o potencial de um anel infinitesimal, portanto,

$$dV_P = k \frac{q}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = 2\pi k \sigma \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}}.$$

O potencial produzido pelo disco será a integral do potencial de cada anel no intervalo $\{0; R\}$,

$$V_P = \int_0^R 2\pi k \sigma \frac{r dr}{(r^2 + z^2)} = 2\pi k \sigma \left| \sqrt{(r^2 + R^2)} \right|_0^R = 2\pi k \sigma (\sqrt{(R^2 + z^2)} - z).$$

É importante que o leitor discuta, como nos exemplos anteriores, os limites do valor do potencial para pontos longínquos e próximos ao disco de carga, pois o resultado deve comprovar as mesmas propriedades do potencial criado por um monopolo.

Exemplo 3.5

Cálculo da função potencial criada por uma casca esférica de carga uniformemente distribuída na casca, considerando o potencial como nulo no infinito.

Solução

O problema da distribuição esférica já foi tratado no cálculo do campo elétrico, conforme a geometria mostrada na Fig. 1.17 chegando-se à solução: $E_r = kQ/r^2$, para $r > R$. Por outro lado, no interior da casca, o campo é nulo. Como o potencial é puramente radial, para uma distribuição esférica de carga, pode-se utilizar o produto $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_r dr$, portanto a diferença de potencial

pode ser calculada como sendo:

$$\Delta V = - \int_{\infty}^r E_r dr = kQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{kQ}{r}.$$

Como o campo elétrico no interior da casca é nulo, dentro da casca a integral do campo, ΔV , também o será e o potencial será constante:

$$V(r) = \frac{kQ}{R}.$$

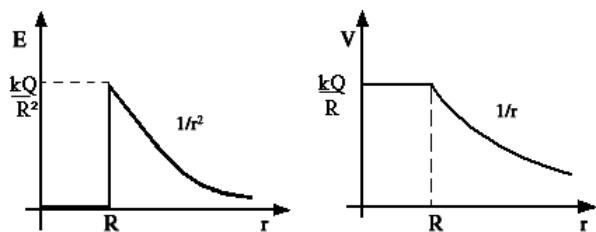


Figura 3.7: Comparação entre o campo elétrico e potencial elétrico produzido por uma casca esférica de carga.

3.5 Potencial em Condutores

O campo elétrico em qualquer ponto do interior de um condutor, em equilíbrio eletrostático, é sempre nulo; como consequência a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer do condutor é sempre nula e se pode concluir que o volume do condutor é equipotencial. Dessa maneira a superfície externa também é equipotencial e as linhas de campo devem ser ortogonais à mesma.

No exemplo da Fig. 3.8 mostra-se um corpo condutor elétrico com uma forma qualquer com uma cavidade dentro na qual se encontra uma carga puntiforme. O condutor está completamente descarregado. Se observa que a carga q induz na superfície interna da cavidade uma carga $-q$ que estabelece o equilíbrio com uma carga $+q$ na superfície externa resultando em um campo nulo no interior do condutor.

Aplicando a lei de Gauss às três superfícies gaussianas mostradas na Fig. 3.8, por linhas tracejadas, é possível concluir pela existência de um campo elétrico existente na cavidade que produz um fluxo igual a q/ϵ_0 , idêntico ao

fluxo existente na parte externa do corpo. A superfície gaussiana mais interna contém a carga $+q$, portanto existe campo no interior da cavidade, devida à carga puntiforme. Na segunda gaussiana, no interior do condutor, o fluxo é nulo, pois a carga no seu interior $q_{int} = q - q = 0$. Na gaussiana mais externa o fluxo não é nulo; portanto, também não o é o campo, pois a carga no seu interior vale $q_{int} = q - q + q = q$. Considerando dois pontos quaisquer no

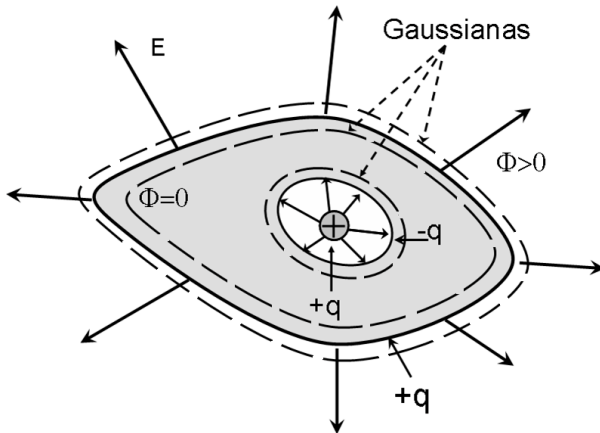


Figura 3.8: Condutor com uma cavidade contendo uma carga puntiforme, mostrando o campo elétrico dentro da cavidade e fora do condutor.

interior do condutor, em que existe equilíbrio eletrostático, como o campo elétrico em qualquer ponto é sempre nulo a diferença de potencial entre esses dois pontos será:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \tag{3.16}$$

Como consequência, tomando qualquer caminho interno todos os pontos terão o mesmo potencial:

$$V_1 = V_2 = \dots V_n = \text{constante}.$$

Dessa maneira verifica-se que o volume do condutor é equipotencial. o que inclui a superfície externa que será uma superfície equipotencial e dessa maneira, como se verifica na figura 3.8, as linhas de campo são ortogonais à mesma.

3.5.1 Contato entre Condutores e Efeito das Pontas

Considerando dois condutores de forma esférica, de raios r_1 e r_2 que possuam cargas q_1 e q_2 , como os mostrados na Fig. 3.9(a):

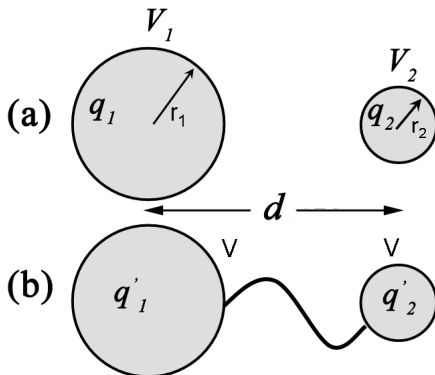


Figura 3.9: Dois condutores esféricos de tamanho diferente (a) isolados um do outro a potenciais diferentes; (b) ligados por um condutor muito fino, igualando os potenciais das duas esferas.

Os potenciais na superfície de cada dos condutores são:

$$V_1 = \frac{kq_1}{r_1}; \quad V_2 = \frac{kq_2}{r_2}. \tag{3.17}$$

Se inicialmente as duas esferas carregadas se encontram a uma distância entre si $d \gg (r_1 + r_2)$, os potenciais acima não serão perturbados.

Ao ligar as duas esferas por intermédio de um fio condutor muito fino, que não perturbe a distribuição final de carga, como é mostrado na Fig. 3.9(b), pode-se dizer que a carga total se redistribui entre as duas esferas, apresentando novas cargas que podem ser calculadas pela média dos potenciais iniciais, ou seja o potencial da nova distribuição será:

$$V = \frac{kq'_1}{r_1}; \quad V = \frac{kq'_2}{r_2}. \tag{3.18}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{q'_1}{q'_2} \simeq \frac{r_1}{r_2}. \tag{3.19}$$

Considerando que a distribuição de carga produz diferentes densidades de carga σ_1 e σ_2 ,

$$q'_1 = \sigma_1 4\pi r_1^2, \tag{3.20}$$

$$q'_2 = \sigma_2 4\pi r_2^2. \tag{3.21}$$

A relação entre densidade de cargas poderá então ser dada por:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.22)$$

A consequência é que a densidade de carga é inversamente proporcional ao raio da superfície condutora. Dessa maneira, considerando um corpo com uma ponta, como o indicado na Fig. 3.10:

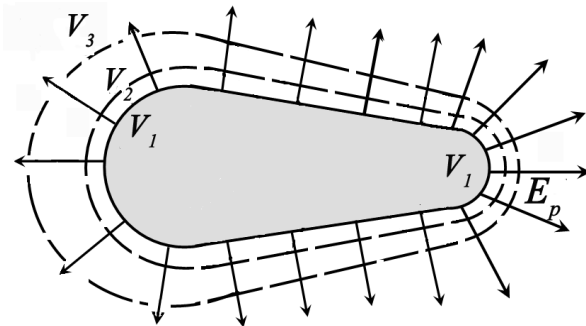


Figura 3.10: Condutor com pontas esféricas, com raio diferente mostrando o efeito de pontas, observado pela maior proximidade das linhas equipotenciais na ponta de menor raio, o que indica o campo elétrico mais intenso. O condutor é um volume equipotencial, tal que $(V_1 > V_2 > V_3)$.

o campo elétrico na região externa do condutor pode ser associado à distribuição de carga, portanto muito mais intenso na região da ponta de menor raio do que nas outras regiões. Dessa maneira, as superfícies equipotenciais serão mais próximas umas das outras na região da ponta conforme se pode observar na Fig. 3.10.

Esse efeito, chamado **efeito das pontas**, é muito importante, especialmente, nos condutores que possuam pontas afiadas, mesmo que o valor do seu potencial não seja muito alto já que o efeito está diretamente ligado à intensidade do campo na região da ponta e não diretamente ao valor do potencial na ponta.

3.5.2 Efeito Corona

Quando o campo elétrico em uma região do espaço é o suficientemente intenso para arrancar elétrons de um metal, é possível produzir o *efeito corona*. Os elétrons arrancados do metal deslocam-se para o ar com velocidades altas produzindo a ionização do mesmo, através de colisões, aumentando a energia

dos átomos. Os átomos do meio como o ar, quando excitados, emitem radiação visível.

Muitas das ocorrências deste fenômeno, são produzidas, naturalmente, no meio ambiente, ou em instalações elétricas, quando os condutores apresentam pontas (poder das pontas). Os marinheiros ao verem a luminosidade na ponta dos mastros dos navios, chamaram o fenômeno, fogo de Santelmo.

O efeito corona também está associado à **ruptura dielétrica**. No caso dos condutores com pontas afiadas, devido ao efeito das pontas, o campo elétrico é muito intenso e nesse caso é possível ocorrer a formação de faíscas, em consequência da ruptura do dielétrico. O princípio deste efeito pode ser estudado com um experimento como o da Fig. 3.11. Quando um campo elétrico atinge $3 \times 10^6 \text{ V/m}$, à temperatura ambiente, o efeito de ruptura, dielétrica pode ser ampliado com a formação em cascata de elétrons de ionização até ocorrer a ruptura catastrófica do ar produzindo uma faísca, como a indicada nas descarga atmosféricas que levam a designação de raios. Uma utilização prática do efeito corona é a que ocorre na formação de faísca nas velas do automóvel .

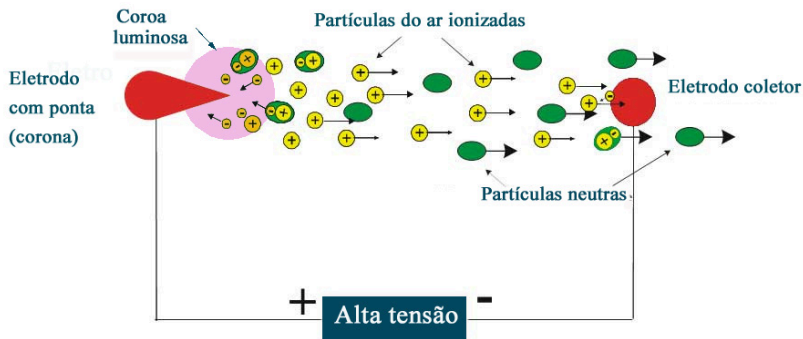


Figura 3.11: Princípio de produção do efeito corona, mostrando o halo luminoso entorno da ponta, gerado pelo ar ionizado.

3.6 Cálculo de E a partir de V

Utilizando a descrição cartesiana do campo elétrico e do deslocamento pode-se mostrar, de forma simplificada, como se determina o campo a partir da função potencial. Considerando que o campo elétrico e o deslocamento são

dados pelos vetores

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}, \quad (3.23)$$

$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}, \quad (3.24)$$

o potencial é o produto escalar desses dois vetores:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz. \quad (3.25)$$

Em geral, a função potencial é dependente das três coordenadas cartesianas, portanto,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \quad (3.26)$$

consequentemente, o campo elétrico pode ser calculado em termos das derivadas parciais do potencial,

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}. \quad (3.27)$$

Essa operação de derivação Eq. 3.27, que é também denominada de gradiente do potencial, $\vec{E} = -gradV$, mostra que o campo elétrico aponta na direção de maior decréscimo da função potencial. É importante observar esta relação entre o campo e o potencial na figura 3.10 onde o gradiente do potencial é mais intenso na ponta.

Exemplo 3.6

Potencial de uma placa plana condutora com carga elétrica.

Solução

A carga em um condutor distribui-se uniformemente sobre a superfície da placa, mas como a mesma possui duas superfícies externas a carga se distribui uniformemente sobre as duas, como mostra a Fig. 3.12. A densidade de carga superficial σ é constante e o campo no interior da placa é nulo. O potencial entre as duas superfícies, será constante mas não nulo. Externamente, como campo elétrico é constante, como já foi demonstrado no exemplo 2.3, o potencial deve variar linearmente já que o campo elétrico é o gradiente da função potencial. Neste caso, considerando a direção x normal ao plano de carga, o campo elétrico será

$$E_x = -\frac{dV}{dx}.$$

Partindo da definição da densidade de carga, considerando que a carga está distribuída nos dois lados do condutor com uma densidade σ e utilizando

campo obtido no exemplo 2.3, dado por:

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma \hat{i}$$

é possível calcular o potencial, integrando o elemento

$$dV = -\vec{E} \cdot (dx\hat{i}) = -2\pi k\sigma dx,$$

da seguinte forma:

$$V_x = - \int_0^x 2\pi k\sigma dx = V_o - 2\pi k\sigma x,$$

na qual, a constante V_o é o valor do potencial em $x = 0$.

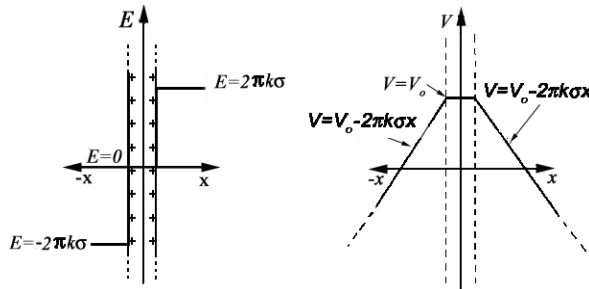


Figura 3.12: Potencial e campo elétrico produzido por uma placa infinita condutora com carga elétrica uniformemente distribuída.

Como mostra o gráfico da Fig. 3.12, o potencial, $V \rightarrow -\infty$ para $x \rightarrow \infty$. Na direção negativa, o potencial também tende ao mesmo valor. Podendo-se concluir que o potencial será nulo na posição $x = V_o/(2k\sigma)$.

Exemplo 3.7

Cálculo do campo elétrico, conhecida a função analítica do potencial.

Solução

A figura 3.13 mostra uma função simples de potenciais lineares em função do eixo x , constantes ou de inclinação constante, portanto o seu gradiente, em cada região, ou será nulo ou constante, conforme mostra o campo elétrico na mesma figura, em escala arbitrária.

De forma genérica, representa-se nesse caso o potencial em cada região por uma função do tipo

$$V_x = a + bx,$$

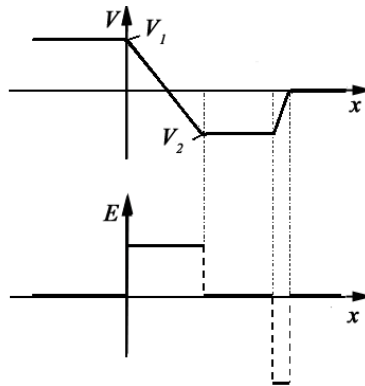


Figura 3.13: Cálculo do campo elétrico a partir da função potencial, mostrado de forma gráfica.

portanto o campo elétrico será obtido calculando-se o gradiente do potencial de cada uma das funções, que neste problema será o coeficiente angular das retas, em cada região:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -b.$$

No caso de funções obtidas experimentalmente, sem uma função algébrica conhecida, o gradiente será calculado por métodos numéricos, podendo-se dizer que esta é uma área de grande interesse pela qualidade cálculo computacional envolvido.

3.7 Forma Diferencial da Lei de Gauss

Para explorar as relações matemáticas que regem os campos de força utilizam-se três diferentes tipos de integração; para as grandezas vetoriais, a integral de linha e de superfície e para funções escalares a integral de volume.

A integral de linha do campo elétrico representa o trabalho por unidade de carga e está relacionada com o conceito de potencial elétrico,

$$W = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V. \tag{3.28}$$

Para as forças, como as elétricas e gravitacionais, as integrais de linha resultam independentes da trajetória de integração, por serem forças conservativas. A integral de superfície foi utilizada na lei de Gauss na sua forma

chamada integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (3.29)$$

No caso das integrais de volume de um campo escalar, utilizou-se o potencial elétrico. A integral de volume do potencial tem uma importância muito grande, pois a sua relação com a integral de superfície e de linha de campos vetoriais (teoremas de Stokes e de Gauss) permite obter interessantes relações da eletricidade.

Pelo Teorema de Stokes, pode-se relacionar a integral de linha com a integral de superfície através da seguinte relação:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A}. \quad (3.30)$$

Pelo teorema de Gauss, relaciona-se a integral de superfície com a integral de volume resultando em:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv. \quad (3.31)$$

A expressão do teorema de Stokes pode ser apresentada em termos do gradiente do potencial ∇V portanto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \times \nabla V) d\vec{A}. \quad (3.32)$$

Como $\vec{\nabla} \times \nabla V \equiv 0$, o campo elétrico deve ser caracterizado por ter o rotacional nulo, $rot \vec{E} = 0$. Um campo conservativo é sempre irrotacional portanto, nos exemplos da Fig. 2.12 os casos (c) e (d), apesar de apresentarem divergência, não representam um campo elétrico pela existência de rotacional. A Fig. 3.3 nos mostra alguns dos exemplos mais conhecidos de campo elétrico, cuja característica é serem irrotacionais.

Na Lei de Gauss pode-se representar o fluxo elétrico em termos do divergente do campo da seguinte forma:

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = - \int_v (\vec{\nabla} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv. \quad (3.33)$$

Os dois integrandos, no volume, são idênticos resultando na Equação de Poisson escrita em função do potencial e do operador Laplaciano,

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.34)$$

A equação de Poisson permite estudar os sistemas mais complexos desde que conhecidas as condições de fronteira.

No caso da inexistência de cargas num dado espaço tanto o divergente do campo como o laplaciano do potencial serão nulos resultando na equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0, \text{ para } \rho(r) = 0. \quad (3.35)$$

A equação de Laplace pode nos levar a analisar alguns fatos interessantes como, por exemplo, o caso de uma região unidimensional, onde não existam cargas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,$$

ou seja, em uma região sem cargas elétricas a função potencial não poderá ter nem máximos nem mínimos o que nos permite interpretar alguns problemas simples de equilíbrio eletrostático.

Esta seção é apenas introdutória ao tema das equações da eletrostática na forma diferencial, mas pela sua beleza e simplicidade deve motivar o leitor a ir aos textos clássicos de eletromagnetismo, indicados na bibliografia.

Exemplo 3.8

Aplicar a lei de Gauss na sua forma diferencial, ou seja a equação de Poisson, ao caso da distribuição de carga pontual.

Solução

Para o campo elétrico, produzido por uma carga pontual, utiliza-se a Lei de Coulomb na sua forma vetorial,

$$\vec{E} = kq \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}.$$

A equação de Poisson, aplicada a este campo, deve mostrar que o divergente do campo só não é nulo na origem, do sistema de referência, ou seja, $\text{div} \vec{E} = 0$ para $r \neq 0$. Para verificar este fato, utiliza-se a forma cartesiana do divergente. Representando o vetor posição na forma cartesiana

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

e derivando o campo na direção x ,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right);$$

como

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right).$$

Como consequência, a derivação do campo para as três direções cartesianas resulta em:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = kq \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0.$$

Ou seja, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ para $r \neq 0$ e o campo devido a uma carga puntiforme só poderá ter divergente na posição da carga.

3.8 Expansão Multipolar

Neste capítulo consideraram-se várias distribuições de carga específicas que incluem problemas de monopolo e dipolo, agora vamos estudar de forma genérica, como a distribuição de carga em um volume ou superfície genérica pode resultar em diferentes ordens de polaridade.

Quando se considera que a carga elétrica é distribuída em um volume genérico, mas em um espaço limitado, que não se estenda ao infinito, o potencial gerado por essa distribuição em um ponto P qualquer do espaço é calculado a partir da expressão genérica da lei de Coulomb:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \quad (3.36)$$

Os vetores posição \vec{r}' , \vec{r}'' , \vec{r} , são os mesmos definidos na Fig. 1.10. A posição do ponto P em relação ao elemento de carga dq é dada por:

$$\begin{aligned} |\vec{r}' - \vec{r}''| &= [r''^2 + r'^2 - 2r'r''\cos\theta]^{1/2}; \\ &= r' \left[1 + \left(\frac{r''}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{r''}{r'}\right)\cos\theta \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

portanto podemos, escreve-la na forma de um binômio:

$$|\vec{r}' - \vec{r}''| = r'(1 + \varepsilon)^{1/2}, \quad (3.38)$$

na qual

$$\varepsilon = \left(\frac{r''}{r'}\right)^2 - \left(\frac{r''}{r'}\right)\cos\theta \quad (3.39)$$

Como ε é muito pequeno, podemos aplicar a expansão binomial ao fator da integral Eq. 3.36 que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} &= \frac{1}{r'}(1 + \varepsilon)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo na expansão binomial, o valor de ε , abrindo-se as potências e limitando-se os termos até terceira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \left(\frac{r''}{r'}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^2 [3\cos^2\theta - 1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^3 [5\cos^3\theta - 3\cos\theta] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo este fator na expressão geral do potencial Eq. 3.36,

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{dq}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int dq \frac{1}{r'} \left\{ [1] + \left(\frac{r''}{r'}\right)[\cos\theta] + \frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^2 [3\cos^2\theta - 1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^3 [5\cos^3\theta - 3\cos\theta] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

As funções entre chaves da Eq. 3.42 correspondem à solução da equação de Laplace e são denominadas polinômios de Legendre. O potencial exato em qualquer ponto contém um número infinito desses polinômios que correspondem à ordem de polaridade. Na soma dos termos presentes na Eq. 3.42, apresentamos somente os primeiros quatro termos:

a) Monopolo

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int dq \frac{1}{r'} [1] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r'}. \quad (3.43)$$

Neste caso temos o potencial de uma carga localizada na origem do sistema de referência, utilizada para o cálculo do potencial de uma distribuição de cargas, uniformemente distribuída com simetria esférica. A carga total q também pode ser denominada de momento de monopolo, com um potencial dado por:

b) Dipolo

$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int dq \left(\frac{1}{r'}\right) \left(\frac{r''}{r'}\right) [\cos\theta] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{pcos\theta}{r^2}. \quad (3.44)$$

O segundo termo ou de dipolo, no qual o momento de dipolo é obtido a partir de: $p = \int r'' dq$.

c) Quadrupolo

$$V_3(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \left(\frac{1}{r'}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{r''}{r'}\right)^2 [3\cos^2\theta - 1]. \quad (3.45)$$

d) Octopolo

$$V_4(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \left(\frac{1}{r'}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{r''}{r'}\right)^3 [5\cos^3\theta - 3\cos\theta]. \quad (3.46)$$

Cada um dos termos entre chaves correspondem aos polinômios de Legendre advindos da solução da Eq. de Laplace em coordenadas esféricas. Para uma distribuição qualquer de carga a contribuição predominante é do termo de monopolo, correspondente à carga total localizada na origem. Os termos seguintes dependem da distribuição espacial de carga. Quando a carga total é nula temos a possibilidade de dominação do termo de dipolo. Quando a carga e o momento de dipolo são nulos temos a dominação do momento de quadrupolo e assim por diante.

Em termos da interação pode-se dizer que a força mais forte corresponde à interação entre monopolos; enquanto que a interação entre dipolos é uma interação mais fraca. Como exemplo temos a interação de monopolos como característica das ligações iônicas enquanto que a interação fraca ou dipolar é característica das forças de Van der Waals.

Dessa forma poderemos escrever a expressão geral para o potencial como uma soma infinita desses polinômios, $P_l(\cos\theta)$:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(r')^{l+1}} dq (r'')^l P_l(\cos\theta). \quad (3.47)$$

A expressão na Eq. 3.47 fornece o valor exato do potencial para qualquer distribuição limitada de carga, onde cada termo é uma potência da função $1/r$, cujo expoente nos indica a ordem de representação polinomial da expansão.

3.9 Aplicações Científicas e Tecnológicas

Durante muito tempo, a utilização da eletrostática se restringiu a experimentos de demonstração ou mesmo curiosidades para serem apresentadas no circo; mas, hoje em dia, além das aplicações tecnológicas já estabelecidas, como a precipitação eletrostática de poeiras ou filtros eletrostáticos,

as máquinas copiadoras e impressoras, a combinação da eletrostática com a Mecânica Quântica está se tornando uma ciência aplicada que pode ser denominada Engenharia Quântica e já permitiu a criação do microscópio iônico de campo o FET e, hoje, se lança na produção de novas moléculas, e produtos em escala nano de aplicação tanto na ciência dos materiais como na biologia e muitas outras áreas.

3.9.1 Microscópio Iônico de Campo

O efeito de pontas, quando a ponta chegar a dimensões atômicas, permite a construção de um microscópio capaz de produzir imagens atômicas da estrutura cristalina dos átomos. A ponta extremamente fina de dimensões atômicas é produzida por uma técnica de eletro-erosão, mergulhando um condutor dentro de um eletrólito, produzindo pontas de até 200 nm . O microscópio de campo iônico permite a visualização de átomos utilizando um campo elétrico que acelera íons para uma tela fluorescente onde eles podem ser ampliados. O microscópio de campo iônico (FIM) foi inventado por Erwin E. Mueller em 1951 Na Universidade do Estado da Pennsylvania, USA¹. O esquema mostrado na Fig. 3.14 mostra que a imagem do espécime é formada em uma placa multiplicadora de elétrons e em uma placa florescente, colocada a aproximadamente 50 mm da ponta do espécime. A imagem só pode ser vista quando a ponta está no vácuo utilizando-se um ambiente de gas como o neon, hélio, hidrogênio ou mesmo argônio. Na mesma figura, observa-se a imagem da ponta, mostrando a estrutura atômica.

3.9.2 Transistor de Efeito de Campo

O transistor de efeito de campo(FET) tem aplicação em quase todos os equipamentos eletrônicos, portáteis de hoje, como os telefones celulares, relógios, notebooks etc. O funcionamento deste transistor pode ser explicado em termos de potencial. Na Fig. 3.15 se observa o esquema de um FET, ele é formado por uma tira de semicondutor no qual se estabelece um campo elétrico. As duas extremidades são chamados de *fonte* e *dreno*, entre as quais existe uma diferença de potencial $V_f - V_s$. A corrente percorre o chamado canal, dos extremos da fonte para o dreno, com um eletrodo ou *gate* controlando essa corrente. O diâmetro físico do canal é constante, mas o seu diâmetro específico para transporte de corrente é controlado por esse eletrodo ou gate. A condutividade do FET depende em qualquer instante do diâmetro do canal. Uma pequena variação da tensão da porta pode causar variação efetiva do diâmetro elétrico do canal, que leva a uma grande variação da corrente. Dessa maneira, o transistor FET pode amplificar o sinal.

¹<http://www.nims.go.jp/apfim/FEM.html>

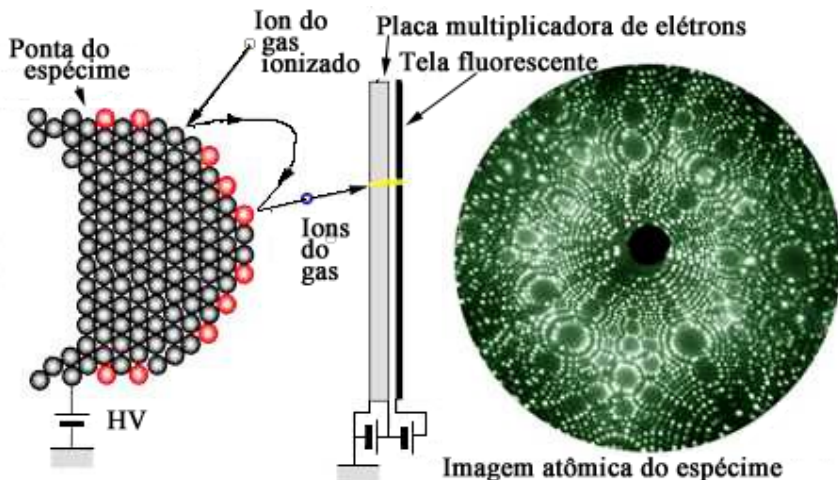


Figura 3.14: Diagrama esquemático do Microscópio Iônico de Campo (FIM), mostrando a imagem atômica da superfície de uma ponta do espécime metálico. Fonte: <http://www.nims.go.jp/apfim/fim.html>.

3.9.3 Precipitadores Eletrostáticos

A precipitação eletrostática é uma das primeiras aplicações tecnológicas de sucesso para a eletrostática. Os primeiros precipitadores eram de um simples estágio, como está mostrado na Fig. 3.16(a) na qual o gás com poeira atravessava um campo elétrico entre a tubulação condutora e um eletrodo muito fino centra capaz de criar um campo elétrico muito intenso.

A ionização do gás, por efeito corona, eletriza as partículas de poeira que aderem às paredes externas, formando cascas. A vibração da tubulação faz com que essas cascas de poeira caiam no fundo do coletor. No caso do precipitador de dois estágios como está mostrado na Fig. 3.16(b) existe uma seção na qual o gás com poeira passa entre eletrodos de pequeno diâmetro, a alta tensão. Nesta região, íons produzidos por descarga corona, carregam as partículas de poeira. Algumas partículas se depositam diretamente no eletrodo terra, mas como em geral a velocidade do gás é muito grande, as partículas passam para a seção na qual são coletadas. Esta seção consiste em um conjunto de eletrodos de alta tensão e terra, que produzem uma força transversal ao movimento, fazendo com que as mesmas seja atraídas por placas intercaladas. A eficiência da limpeza do gás depende do comprimento desta

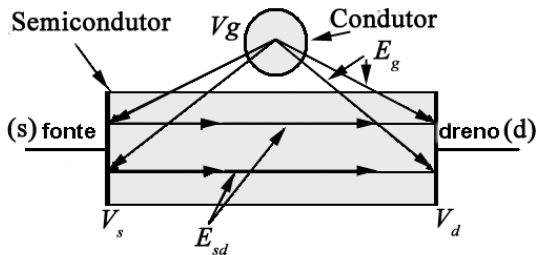


Figura 3.15: Transistor de efeito de campo, (FET), mantendo uma diferença de potencial entre a fonte e o dreno, V_d , em uma tira de semicondutor. A porta ou gate é um condutor cujo potencial, V_g , controla o campo entre a fonte e o dreno E_{sd} , anulando-o na fonte e reforçando-o no dreno.

seção, permitindo que mesmo partículas de $1 \mu m$ sejam capturadas.

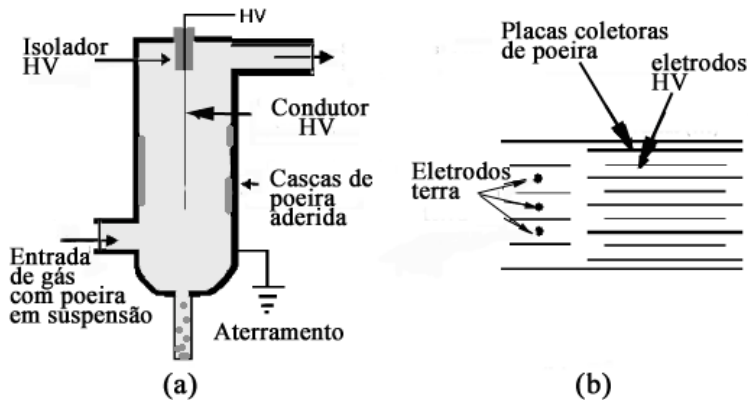


Figura 3.16: Diagrama esquemático da precipitação eletrostática, (a) um único estágio; (b) sistema de dois estágios.

3.10 Questões, exercícios e problemas

1. Obtenha o valor da energia potencial entre duas cargas, elementares e , uma positiva e outra negativa colocadas a uma distância de $10^{-10} m$ uma da outra o que corresponde à escala atômica.
2. Calcule a energia necessária para ionizar o átomo de hidrogênio, considerando que o raio de Bohr é de $5,29 \times 10^{-11} m$.

3. Uma carga elétrica e , positiva é liberada com energia cinética nula, em um campo elétrico, deslocando-se de uma superfície equipotencial de 10 V para outra de -3 V . Qual a energia fornecida para realizar esta operação? Esta operação se realiza espontaneamente, ou é necessário utilizar uma força externa? Explique.
4. Em um tubo de televisão necessita-se que os elétrons adquiram uma energia cinética de 30 keV . Qual deve ser a diferença de potencial utilizada no canhão eletrônico do tubo capaz de acelerar os elétrons a essa energia? Qual a velocidade dos elétrons ao atingir essa energia cinética?
5. Calcule o potencial elétrico gerado por três cargas elétricas negativas e iguais a 1 nC , colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a 10 cm , no ponto central do triângulo.
6. Utilizando a mesma geometria do problema anterior; desenhe as linhas de campo elétrico e equipotenciais.
7. Discuta os valores limites do potencial produzidos para pontos muito próximos e longínquos de um disco de carga, partindo da expressão obtida no exemplo 3.4.
8. Obtenha a expressão para o potencial $V(r)$, gerado por uma carga Q colocada no centro de uma casca esférica condutora de raio R . Compare graficamente a função potencial com o campo elétrico dentro e fora da casca.
9. Explique como o efeito das pontas é o fundamento de funcionamento nos pára-raios?
10. Desenhe as superfícies equipotenciais relativas às seguintes distribuições de carga: linear, plana e esférica.
11. Obtenha o valor do campo elétrico e represente o resultado de forma gráfica, em escala, relativo à função potencial apresentada na Fig. 3.13, utilizando os seguintes valores, $V_1 = 10\text{ volts}$; $V_2 = -6\text{ volts}$; $a = 10\text{ cm}$, $b = 15\text{ cm}$; $c = 16\text{ cm}$.
12. Justifique, em termos do conceito de potencial elétrico, porque é necessário fazer o aterramento do pulso, utilizando uma pulseira ligada ao fio terra, quando for necessário retirar as memórias, ou mesmo o processador de um computador, especialmente em dias secos.

13. No espaço livre, sem cargas elétricas o campo elétrico não pode ser divergente, conforme mostrou-se no exemplo 3.8 analise da mesma forma, essa conclusão, utilizando a equação de Poisson.
14. Calcule a carga que pode ser armazenada na superfície esférica de um gerador de Van der Graaff que possui um raio de 10cm , considerando que a ruptura dielétrica do ar ocorre com um campo de 3 kV/mm .

Capacitores e Energia Eletrostática

Michael Faraday considerado o maior físico experimental de todos os tempos, introduziu os conceitos de campo elétrico, descobriu a indução eletromagnética e o diamagnetismo. É inacreditável o número de seus experimentos de eletromagnetismo publicados entre 1751 e 1753, sendo famosos os seus estudos da descarga elétrica utilizando pandorgas...

4.1 Capacitores e Capacitância

Dois corpos condutores quaisquer, separados por um isolante, formam um capacitor, cuja característica física é a sua capacitância, ou propriedade de armazenar carga eficientemente. Na Fig. 4.1, mostram-se exemplos de corpos capazes de armazenar carga. Embora os capacitores comerciais tenham formas externas diversas, em geral cilíndricos e planas, a sua representação é feita por duas placas paralelas conforme a Fig. 4.2 representativa de qualquer capacitor. Nessa figura observa-se que a forma do campo elétrico gerado entre as placas é a razão da eficiência de armazenar cargas, pois quanto mais longas as placas e menor a distância entre as mesmas melhor o confinamento do campo evitando-se a dispersão das linhas.

A característica física, que define o armazenamento de carga é a *capacitância* C , definida como sendo a razão entre a carga e a diferença de potencial que se estabelece entre as placas do capacitor, isto é:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (4.1)$$

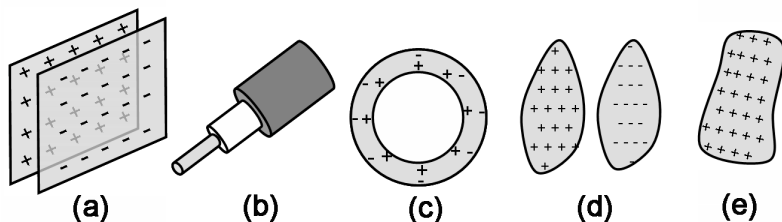


Figura 4.1: Diferentes formas de condutores, capazes de armazenar carga: (a) dois condutores paralelos separados por um isolante elétrico, (b) cabo coaxial, formado por dois condutores concêntricos separados por isolante, (c) capacitor formado de duas placas condutoras concêntricas, cilíndricas ou esféricas, separadas por um isolante, (d) dois condutores de forma qualquer separados por um isolante, (e) um condutor isolado, de qualquer forma, também possui uma capacitância.

A unidade do SI para a capacitância é o farad (F),

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}.$$

Um dispositivo que possua uma capacitância de 1 *farad* resulta no armazenamento de em uma quantidade muito elevada de carga, por isso adotam-se especialmente os submúltiplos, o mF , o μF , o nF e o pF . Os capacitores são componentes indispensáveis na construção de circuitos elétricos, como por exemplo nos rádios e demais aparelhos domésticos. Os capacitores são utilizados em todas as áreas da ciência e da tecnologia mas deve-se destacar o seu uso mais recente como fontes de energia, tanto em aparelhos de som de alta potência como em instrumentos miniaturizados.

4.2 Cálculo da Capacitância

Para o cálculo da capacitância C necessita-se de dois ingredientes, o valor da carga armazenada e a diferença de potencial existente entre as placas. Lembrando que uma dada distribuição de carga, dependendo da geometria das placas, produz um campo elétrico cujo valor pode ser determinado utilizando a lei de Gauss que permite a obtenção do potencial elétrico. A seguir damos três exemplos de cálculo da capacitância, para três diferentes geometrias: plana, esférica e cilíndrica.

Exemplo 4.1

Capacitor de Placas Planas

Solução

Um capacitor de placas planas é caracterizado pela área A das placas pela distância d entre elas e pela densidade de carga superficial σ . A carga em cada uma das placas é calculada por

$$Q = \sigma A.$$

A função campo elétrico, para o caso real de um capacitor finito, como mostra a Fig. 4.2(a), é muito complexa, especialmente o efeito de pontas, por isso neste exemplo se utilizará uma versão simplificada, considerando que as placas possuem área infinita, como nos mostra a Fig. 4.2(b). O campo elétrico, E , pode ser obtido a partir da aplicação da lei de Gauss cuja geometria se escolheu como sendo simétrica às placas do capacitor, conforme mostra a Fig. 4.2(b), representada pela linha tracejada, como gaussiana, contendo a carga positiva.

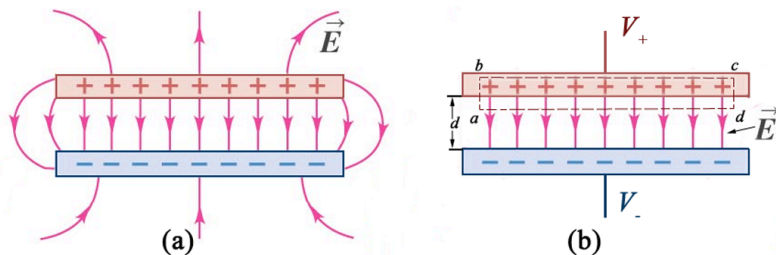


Figura 4.2: Capacitor de Placas Planas: (a) mostrando o campo elétrico de dimensões finitas (campo real); (b) Campo elétrico homogêneo, desprezando o efeito das pontas, ou seja, considerando o capacitor de dimensão infinita, o com d muito pequeno. Neste modelo se aplica a lei de Gauss, utilizando a Gaussiana, abcd.

Para a aplicação da lei de Gauss, calcula-se, primeiro o fluxo do campo elétrico, utilizando essa superfície gaussiana que contém uma das placas.

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

Considerando que nos lados $(a - b)$ e $(c - d)$, o vetor $d\vec{A}$ é normal à gaussiana e portanto normal ao campo, e que no lado $(b - c)$ o campo elétrico é nulo, resta só o fluxo através do lado $(d - a)$, na qual o campo é paralelo a $d\vec{A}$.

Aplicando a lei de Gauss, considerando que a carga no interior da gaussiana é a carga da placa positiva,

$$\Phi = EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

resulta o campo elétrico

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

A diferença de potencial entre as placas é igual ao trabalho por unidade de carga:

$$V_+ - V_- = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ed.$$

Substituindo o valor do campo, resulta

$$V_+ - V_- = -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0},$$

e a capacitância será então

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Isso mostra que a capacitância depende apenas das características construtivas do capacitor, ou seja, área das placas, distância entre elas e permissividade elétrica do isolante, que neste caso é o vácuo.

Exemplo 4.2

Capacitor Esférico.

Solução:

O campo elétrico, produzido no interior de uma capacitor esférico, pode ser calculado pela lei de Gauss, como já foi feito em exemplos anteriores, resultando em:

$$E = \frac{kQ}{r^2}.$$

Ao longo do percurso radial de $r = a$ até $r = b$, o campo é paralelo a $d\vec{A}$ portanto a diferença de potencial entre as placas é dada por:

$$V_+ - V_- = \int_a^b E dr = kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

e a capacitância será dada por:

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}.$$

Da mesma forma que no exemplo de placas planas, a capacitância é função das dimensões.

Uma extensão deste exemplo é o cálculo da capacitância de uma esfera condutora isolada, com raio a , pois apesar de não ser um capacitor, a sua utilização é muito grande e é necessário entender a relação entre o campo elétrico, o potencial e a carga contida em um corpo condutor de forma esférica.

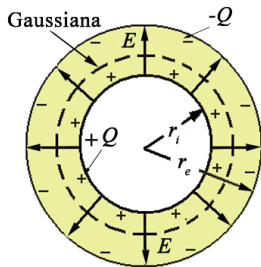


Figura 4.3: Capacitor esférico, com uma gaussiana envolvendo a carga da placa positiva.

Como o potencial da superfície de uma esfera carregada é dada por,

$$V = \frac{kQ}{a},$$

pode-se calcular a capacitância obtendo o limite da capacitância, do capacitor esférico, quando $b \rightarrow \infty$, portanto a capacitância da esfera será,

$$C = \frac{a}{k} = 4\pi\epsilon_0 a.$$

De forma genérica, pode dizer que um condutor de raio R , possui uma capacitância:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Exemplo 4.3

Capacitor Cilíndrico.

Solução:

O capacitor cilíndrico é formado por duas superfícies cilíndricas coaxiais de raios a e b , de comprimento L contendo cargas, $+Q$ e $-Q$. O fluxo do campo elétrico entre as superfícies cilíndricas, obtido pela lei de Gauss vale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k q_{int}.$$

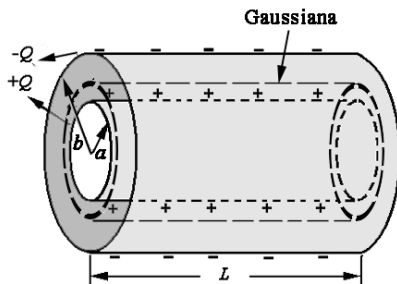


Figura 4.4: Capacitor cilíndrico, com a gaussiana envolvendo a carga da placa positiva.

Integrando,

$$E2\pi rL = 4\pi kQ,$$

resulta no campo elétrico

$$E = \frac{2kQ}{Lr}.$$

A diferença de potencial entre as duas placas será então dado pela integral do campo entre a placa positiva e negativa,

$$V_+ - V_- = \frac{2kQ}{L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2kQ}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

que resulta no valor da capacitância,

$$C = \frac{L}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

4.3 Energia no Campo Elétrico

Os capacitores são dispositivos eficientes para armazenar energia no seu campo elétrico. Quando se carrega um capacitor, da placa positiva se transferem elétrons para a placa negativa, realiza-se um trabalho que ficará armazenado no capacitor sob a forma de energia potencial eletrostática. Considerando que, em um dado instante, se transfere uma carga dq , exatamente no momento em que a diferença de potencial é ΔV entre as placas, a variação da energia potencial será

$$dU = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq. \quad (4.2)$$

Quando a carga varia de zero a Q , a energia potencial adquirida será

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (4.3)$$

Devido à relação entre carga, capacitância e potencial chega-se à expressão da energia potencial

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\Delta V}{2} = \frac{C\Delta V^2}{2}. \quad (4.4)$$

Utilizando a expressão da capacitância, de um capacitor de placas planas, pode-se obter a expressão da energia eletrostática em função do campo elétrico, já que o campo nesse capacitor está relacionado com a diferença de potencial da seguinte forma

$$\Delta V = Ed,$$

portanto,

$$U = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} (Ad). \quad (4.5)$$

Como o valor (Ad) é o volume, entre as placas, que contém a energia armazenada sob a forma eletrostática, pode-se definir a densidade de energia como,

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (4.6)$$

O resultado nos mostra que a densidade de energia no campo elétrico é proporcional ao quadrado do campo elétrico.

Esta expressão, apesar de ter sido obtida para o capacitor de placas planas, é absolutamente geral e poderá ser obtida, da mesma maneira, tanto para outros capacitores como para qualquer outro dispositivo onde exista campo elétrico no seu espaço.

4.4 Capacitores em Série e em Paralelo

A associação de capacitores, em série ou em paralelo, tem vários objetivos práticos; o primeiro e mais simples é o de obter capacitâncias que não se encontram em capacitores comerciais a partir de capacitores comerciais. Existem outras utilidades, sendo muito interessante a construção de fontes de alta tensão a partir da associação de capacitores como o gerador Marx, que se descreve ao final deste capítulo, nas aplicações tecnológicas e científicas.

4.4.1 Capacitores em Série

Considerando uma associação de três capacitores, como a da Fig. 4.5(a), pode-se observar que a característica desta associação é a carga idêntica em todas as placas dos capacitores. Portanto,

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 \quad (4.7)$$

A diferença de potencial da associação é igual à soma dos potenciais de cada capacitor, portanto,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right). \quad (4.8)$$

Portanto, a capacitância equivalente C_{eq} será definida por,

$$\frac{Q}{C_{eq}} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right). \quad (4.9)$$

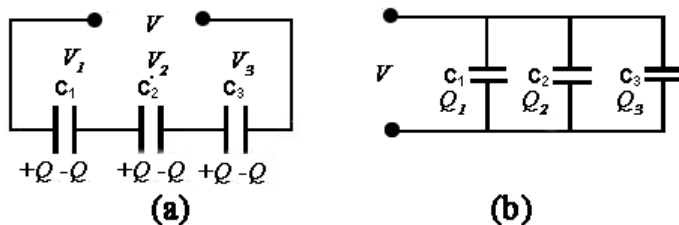


Figura 4.5: Associação de capacitores, (a) em série, (b) em paralelo.

A capacitância equivalente será então dada por

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}. \quad (4.10)$$

Para uma associação de n capacitores em série, a capacitância equivalente será dada por

$$C_{eq} = \frac{\prod_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n C_i}. \quad (4.11)$$

4.4.2 Capacitores em Paralelo

A característica do circuito de capacitores, em paralelo na Fig. 4.5(b), nos mostra que o potencial V é idêntico para todos os capacitores, ficando neste caso a carga diferente para cada capacitor, portanto a carga total será:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V = V(C_1 + C_2 + C_3). \quad (4.12)$$

Portanto a capacitância equivalente da associação pode ser calculada por

$$Q = C_{eq} V = V(C_1 + C_2 + C_3), \quad (4.13)$$

e a capacitância equivalente da associação em paralelo resulta em

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (4.14)$$

Para uma associação de n capacitores em paralelo, pode-se definir a capacitância equivalente:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (4.15)$$

4.5 Capacitores com Dielétrico

Os capacitores podem utilizar entre as suas placas, além do vácuo, um material dielétrico. Dessa maneira a capacitância aumentará por um fator κ , característico do material, sempre com valor maior do que a unidade. Na tabela 4.1, encontra-se a constante dielétrica, juntamente com a rigidez dielétrica para vários materiais, de interesse prático. A constante dielétrica pode ser definida a partir da relação entre o campo elétrico no vácuo, e o campo elétrico no material considerado:

$$\kappa = \frac{E_o}{E}. \quad (4.16)$$

Dando como exemplo o capacitor de placas planas, pode-se escrever a relação para os potenciais:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{E_o}{\kappa} = \frac{V_o}{\kappa d}. \quad (4.17)$$

Portanto com

$$C = \frac{Q}{V} = \kappa \frac{Q}{V_o}, \quad (4.18)$$

pode-se encontrar a capacitância para o capacitor com dielétrico,

$$C = \kappa C_o = \frac{\kappa \varepsilon_o A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}, \quad (4.19)$$

em que permissividade do dielétrico é definida por:

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_o.$$

A escolha da espessura de dielétrico depende de dois critérios, o primeiro é

Tabela 4.1: Constante Dielétrica e Rigidez Dielétrica de vários materiais.

Material	Constante Dielétrica κ	Rigidez Dielétrica $E_{max}(kV/mm)$
Ar	1,00059	3-4
Mica	4,9	24
Óleo isolante	2,24	12
Papel	3,7	12
Acrílico	3,4	40
Vidro pirex	5,6	14
Porcelana	7	5,7

definido pela espessura mínima função da diferença de potencial máxima de

trabalho do capacitor. Nesta etapa a definição será feita utilizando-se a tabela de rigidez dielétrica. O segundo critério define a espessura, pelo cálculo da capacitância necessária, utilizando-se a Eq. 4.19 e levando em consideração, também como limitante a espessura obtida pelo critério da rigidez dielétrica.

4.5.1 Propriedades dos Dielétricos

Qualquer substância que não seja condutora pode ser chamada dielétrica, portanto são substâncias que não possuem elétrons livres. As moléculas destes materiais podem ser apolares, nos quais os orbitais eletrônicos possuem o mesmo centro dos núcleos positivos, ou polares, que possuem momento dipolar elétrico. O campo elétrico externo polariza as moléculas apolares no sentido oposto ao campo e conseqüentemente tanto moléculas apolares como polares se orientam quando colocadas em uma região de campo elétrico, sofrendo o processo de polarização. A polarização produz então um grande dipolo, somatório de todos os dipolos atômicos ou moleculares capaz de reduzir o campo elétrico. Quando o campo elétrico externo é muito forte, os elétrons poderão ser separados, produzindo a ionização das moléculas. Dessa maneira, o dielétrico poderá se tornar um condutor, e o processo é denominado de ruptura do dielétrico. O exemplo mais interessante da ruptura dielétrica é a formação de raios das descargas atmosféricas. Cada substância é caracterizada pelo máximo campo elétrico que pode suportar E_{max} , ao qual se dá o nome de rigidez dielétrica, com valores como os apresentados na tabela 4.1.

Efeito do Campo Elétrico nos Dielétricos

Quando o espaço entre as placas de um capacitor está completamente preenchido com um material dielétrico, a capacitância aumenta por um fator k , chamado constante dielétrica, que é característica física do material. Em uma região completamente preenchida por um dielétrico, todas as equações eletrostáticas contendo ϵ_0 devem ser modificadas substituindo-se ϵ_0 por $k\epsilon_0$. Os efeitos da adição de um dielétrico ao capacitor podem ser entendidos fisicamente em termos da ação de um campo elétrico sobre dipolos elétricos permanentes ou induzidos no dielétrico. O resultado é a formação de cargas superficiais induzidas cuja presença resulta no enfraquecimento do campo no interior do dielétrico.

A polarização elétrica P de um dielétrico sob a ação de um campo elétrico externo \vec{E}_e como está mostrado na Fig. 4.6 é definida pelo vetor \vec{P} :

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}_e, \quad (4.20)$$

em que χ é a susceptibilidade dielétrica do material. Associado à polarização \vec{P} , aparece um campo elétrico devido à redistribuição de cargas, indicado por

Em um material com moléculas polares ou polarizadas o campo elétrico produz uma polarização preferencial na direção do mesmo. Essa polarização dielétrica pode ser definida a partir da susceptibilidade dielétrica do material, resultando em uma redistribuição de carga elétrica, responsável por vários efeitos, entre os quais se destaca o fato de que um corpo eletricamente carregado sempre atrai um dielétrico descarregado.

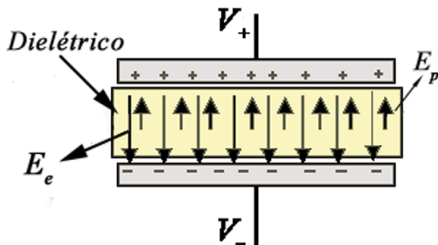


Figura 4.6: Capacitor de placas planas com dielétrico, mostrando o campo externo e o de polarização.

E_p :

$$\vec{E}_p = \chi \vec{E}_e. \tag{4.21}$$

Como consequência, o campo no interior do dielétrico é dado por

$$E_d = \frac{E_e}{\kappa} = E_e - E_p = E_e - \frac{P}{\epsilon_o}, \tag{4.22}$$

portanto,

$$P = \epsilon_o \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_e, \tag{4.23}$$

e

$$P = \epsilon_o (\kappa - 1) E_d. \tag{4.24}$$

O resultado é que a susceptibilidade é dada por

$$\chi = \kappa - 1. \tag{4.25}$$

Como a constante dielétrica $\kappa > 1$ isto equivale a dizer que a susceptibilidade é sempre positiva ($\chi > 0$). É comum escrever o campo elétrico na presença do dielétrico em termos do vetor deslocamento elétrico cujo símbolo é dado por \vec{D} , definido da seguinte maneira:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}_e = \kappa \epsilon_o \vec{E}_d. \tag{4.26}$$

Como consequência, o vetor deslocamento pode ser calculado em termos da polarização, portanto,

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}_d + \vec{P}. \tag{4.27}$$

A lei de Gauss poderá então ser escrita em termos do vetor deslocamento da seguinte forma,

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_e, \quad (4.28)$$

em que q_e é a chamada carga livre que gera o campo externo.

4.6 Aplicações Científicas e Tecnológicas

São inumeráveis as aplicações dos capacitores tanto na ciência como na tecnologia. Nesta seção descrevem-se apenas duas aplicações, a primeira é a sua utilização para a geração de altas tensões e a segunda é utilização de capacitores com capacidade muito alta da ordem do farad.

4.6.1 Geradores de Alta Tensão

O gerador de alta tensão do tipo Marx consiste de um conjunto de capacitores, resistências e spark gaps montados de acordo com a Fig. 4.7. Os capacitores C são carregados em paralelo via as resistências de aproximadamente $1M\Omega$, através de uma fonte externa. Os capacitores, C , são carregados em paralelo com as resistências R , ficando carregados com a tensão V de entrada. Quando o primeiro spark-gap (SG), (da direita), sofre a ruptura a tensão do próximo capacitor aumenta, fazendo com o próximo SG também rompa e assim por diante. Quando todos os SG sofreram ruptura, a pequena impedância do ar ionizado nos SG conecta todos os capacitores em série, multiplicando a tensão pelo número de capacitores. O percurso no ar ionizado possui uma pequena resistência se comparada com a dos resistores de carga R . A fonte do tipo Marx funciona como um multiplicador de tensão, onde o fator de multiplicação é igual ao número de capacitores em paralelo. No exemplo da Fig. 4.7 com uma fonte de entrada de 50 kV e os 4 capacitores pode-se atingir um potencial de 200 kV .

4.6.2 Capacitores de Alta Capacidade

Existem dois tipos de capacitores que podem atingir grande capacitância, os de cerâmica tipo multi-camadas e os eletrolíticos. Nos primeiros, as placas metálicas são separadas por dielétricos que possuem constante dielétrica maior do que 20.000. No caso dos capacitores eletrolíticos, as placas são revestidas de óxidos metálicos e o isolante. A tecnologia atual permite fabricar capacitores com alguns farads, nos quais o dielétrico é o mylar imerso em um condutor líquido. A utilização de capacitores de grande capacitância, é muito importante como fonte de energia, permitindo substituir em alguns

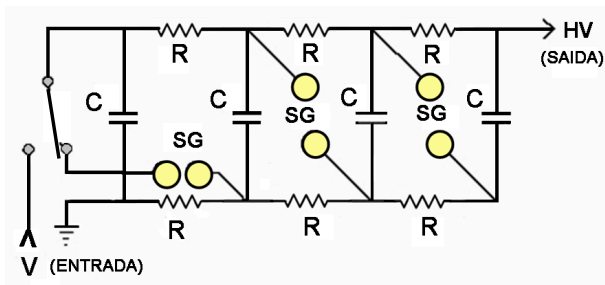


Figura 4.7: Gerador de Alta Tensão tipo Marx com 4 capacitores em série unidos por Spark-Gaps (SG).

equipamentos, com vantagem sobre as baterias. Dois exemplos muito interessantes e atuais são o seu uso em notebooks e em equipamentos de som de alta potência para veículos automotores. Para a utilização de capacitores como fontes é necessário garantir que eles forneçam uma corrente constante durante um certo tempo. Na forma usual os capacitores perdem gradativamente a sua carga e a corrente que circula em uma resistência colocada em paralelo com o mesmo também diminuirá. O desenvolvimento de novos sistemas semicondutores com característica $I(V)$ uma função plana, como nos mostra a Fig. 4.8, permite o uso de capacitores como fontes.

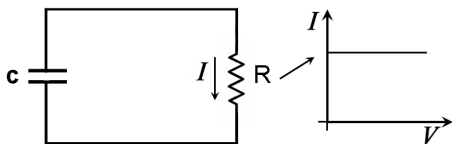


Figura 4.8: Esquema de um capacitor, utilizado como fonte ligado a uma carga resistiva (semicondutor), cuja característica $I(V)$ é uma função plana.

4.7 Questões, Exercícios e Problemas

1. Um capacitor de $470 \mu F$ armazena uma carga de $100 \mu C$. Qual é a diferença de potencial entre as suas placas?
2. Do capacitor da questão 1, retira-se a metade da carga, qual será o novo potencial?
3. Considerando-se que o capacitor do problema 1 é de placas planas e quadradas, com uma distância entre placas de $0,05 \text{ mm}$, qual será a área das suas placas?
4. Qual a quantidade de energia eletrostática necessária para carregar o capacitor da questão 1?
5. Considerando um capacitor cujo dielétrico é o ar, cuja rigidez dielétrica é 3 kV/mm , qual a energia por unidade de volume, no momento de ocorrer a ruptura do dielétrico?
6. Um capacitor, ao ser calculado, obedece a duas limitações físicas: a primeira é a rigidez dielétrica e a segunda são as suas dimensões. Discuta como a capacitância depende desses parâmetros.
7. Um capacitor de placas planas, cujo dielétrico é o ar, deve ter no máximo $0,1 \text{ mm}$ de distância entre as placas. a) Qual a máxima tensão que ele pode suportar antes de ocorrer a ruptura dielétrica? b) Considerando que ele deva ter $100 \mu F$, quais devem ser as sua dimensões?
8. Quatro capacitores de 17 nF estão ligados dois a dois em série, e as duas associações em série estão ligadas em paralelo. Calcule a capacitância equivalente dos mesmos.
9. Um cabo coaxial é formado por um condutor central de $0,5 \text{ mm}$ de diâmetro e um condutor externo de 5 mm também de diâmetro. Considerando que entre os condutores existe um isolante com constante dielétrica $2,5$, calcule a capacitância por unidade de comprimento.
10. Uma esfera metálica, isolada, de raio 10 cm , é utilizada para armazenar carga elétrica. Qual o potencial, máximo, que ela atinge, se o meio for o ar? O que ocorre se essa tensão for ultrapassada?

CAPÍTULO 5

Corrente Elétrica

Georg Simon Ohm professor de matemática entre 1825 e 1827 desenvolveu a primeira teoria matemática sobre a condução elétrica, e só dois anos antes de morrer conseguiu a posição de professor de física na universidade...

5.1 Lei de Ohm

A corrente elétrica está relacionada com o movimento de cargas elétricas sob a ação de campo elétrico. Quando ocorre o movimento de cargas elétricas em um tubo de televisão no qual existe vácuo, torna-se fácil explicar que os elétrons são liberados pelo filamento do tubo e acelerados por um campo elétrico existente no interior do tubo, formando uma corrente elétrica. A corrente elétrica nos condutores também é devida ao movimento de elétrons, mas neste caso a densidade do meio é muito grande e o efeito da estrutura do material, é um efeito de arraste ou atrito entre os elétrons livres e a estrutura atômica quase fixa. É muito importante entender que a resistência ao movimento de cargas elétricas, depende dos fundamentos da física quântica, que também explica as diferenças de comportamento na condução elétrica dos condutores, isolantes, semicondutores e supercondutores, materiais que fazem parte da nossa vida diária pela sua utilidade na condução da eletricidade.

5.1.1 Corrente Elétrica e Densidade de Corrente

Para o estudo da corrente elétrica deve-se considerar que o movimento de cargas elétricas é realizado por **partículas portadoras de carga**, os elétrons, no caso dos sólidos e os íons positivos e negativos no caso dos gases ou líquidos.

A corrente que passa através da área transversal de um condutor é definida, de forma simplificada, como sendo:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (5.1)$$

que representa a corrente, como a variação temporal da carga, que atravessa uma seção transversal ao condutor. A corrente elétrica é uma medida da taxa de passagem de carga elétrica pela seção do condutor e a sua unidade no SI é o Ampère,

$$1 A = 1 C/s.$$

A corrente elétrica possui um sentido convencional (corrente convencional) e um sentido real (corrente real). O sentido real é aquele do movimento dos portadores de carga, no caso dos elétrons como portadores de carga, o movimento convencional é sempre de cargas positivas, hipotéticas, na mesma direção do campo elétrico. Assim em um condutor, a direção convencional da corrente é contrária à dos elétrons. Na Fig. 5.1, se observa a corrente real de elétrons, e a corrente convencional I na mesma direção do campo elétrico, no interior do condutor, responsável pela corrente elétrica.

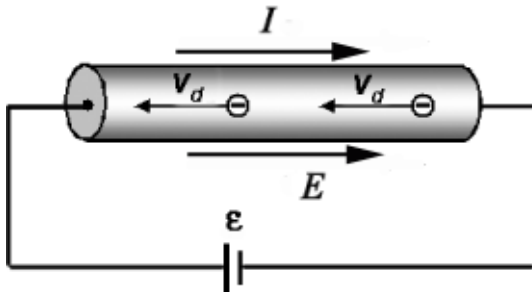


Figura 5.1: Corrente real de elétrons em um condutor e corrente convencional I , em função da direção do campo elétrico estabelecido por uma *fem*.

A corrente elétrica, apesar de ter direção e sentido, é uma grandeza escalar pois nada mais é do que a taxa de passagem de carga elétrica pela seção

transversal do condutor. Quando se torna necessário estudar com mais detalhe o movimento dos portadores de carga utiliza-se uma grandeza vetorial para definir a corrente elétrica que é o vetor densidade de corrente \vec{J} , cujo módulo é a corrente por unidade de área e a direção é a mesma do campo elétrico. A relação entre a corrente e a densidade de corrente pode ser entendida melhor pela seguinte relação:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (5.2)$$

Considerando que o condutor da Fig. 5.1 possua um comprimento L e seção transversal de área A ; o conjunto de portadores de carga, movimentando-se com velocidade média de deslocamento v_d na direção do campo elétrico leva um tempo Δt para percorrer esse comprimento L do condutor portanto

$$L = v_d \Delta t.$$

A quantidade de carga elétrica contida em um volume ($A.L$) do condutor será dada por:

$$\Delta Q = n_q q A v_d \Delta t, \quad (5.3)$$

em que n_q *partículas*/ m^3 é a densidade de portadores de carga no condutor cujo valor, pode ser calculado seguindo o Exemplo 5.1 e utilizando as propriedades atômicas presentes na tabela 5.1. A corrente elétrica média será então,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n_q q v_d A, \quad (5.4)$$

fazendo com que a densidade de corrente, possa ser definida por:

$$\vec{J} = n_q q \vec{v}_d. \quad (5.5)$$

Nos condutores elétricos, apesar do campo elétrico, no seu interior, ter a mesma direção do condutor, o movimento, microscópico dos elétrons é aleatório devido à agitação térmica, com um pequeno deslocamento na direção contrária à do campo. Esse movimento caótico é devido aos choques com os átomos e impurezas do metal conforme mostra a Fig.5.2. Essa figura nos mostra esse tipo de movimento que resulta em uma velocidade média de deslocamento denominada *velocidade de deriva*. Considerando que a densidade de portadores é a densidade de elétrons de condução pode-se obter, a partir da equação 5.4, a expressão para a velocidade de deriva:

$$v_d = \frac{I}{n_e e A}, \quad (5.6)$$

na qual "e" é a carga do elétron e n_e a densidade de elétrons de condução. A densidade de corrente, Eq. 5.5, para elétrons, poderá ser escrita como:

$$\vec{J} = n_e (-e) \vec{v}_d. \quad (5.7)$$

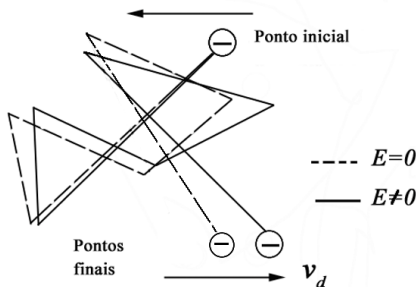


Figura 5.2: Os elétrons colidem com a rede cristalina do condutor deslocando-se aleatoriamente. Quando o campo é nulo o deslocamento médio também é nulo mas, quando existe um campo elétrico ocorre uma pequena deriva na direção contrária ao campo.

A direção da densidade de corrente é a mesma da velocidade de deriva, quando se considera o sentido da corrente convencional. Devido ao sinal da carga ser negativo, quando os portadores de carga são elétrons, essa direção é contrária à velocidade de deriva, como indica a equação 5.7 mas continua tendo a mesma direção do campo elétrico. Para o caso dos condutores a corrente elétrica não é afetada pelo sinal da carga pois quase sempre se considera a direção de portadores positivos portanto, a equação 5.4 toma a seguinte forma:

$$I = n_e e v_d A \tag{5.8}$$

Exemplo 5.1

Calcule o valor da velocidade de deriva dos elétrons em um condutor comercial de cobre e de alumínio de área transversal 1 mm^2 quando percorrido por uma corrente de 1 A .

Solução:

Tanto o cobre como o alumínio possuem aproximadamente um elétron livre por átomo e suas propriedades se encontram na tabela 5.1.

A densidade de portadores de carga, para o cobre, é dada por,

$$n_e = \frac{N_A \rho}{M} = \frac{(6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})(8,92 \text{ g/cm}^3)}{63,5 \text{ g/mol}} \frac{1 \text{ elétron}}{\text{átomo}}$$

Tabela 5.1: Propriedades atômicas dos condutores

Condutor	Massa Atômica gramas	Densidade g/cm^3
cobre	63,5	8,92
alumínio	26,98	2,7
prata	107,9	10,5
ouro	196,97	19,3

$$= 8,5 \times 10^{22} \text{ elétrons/cm}^3,$$

enquanto que para o alumínio vale, $6,05 \times 10^{22} \text{ elétrons/cm}^3$. Considerando que a corrente e a velocidade de deriva são constantes em toda a seção transversal do condutor,

$$v_d = \frac{I}{n_e e A} = \frac{1 \text{ A}}{(8,5 \times 10^{22})(1,6 \times 10^{-19})(1 \times 10^{-2})} = 0,0073 \text{ cm/s} = 0,2628 \text{ m/h}$$

para o alumínio, a velocidade de deriva será,

$$v_d = 0,187 \text{ m/h}$$

Sendo tão baixa a velocidade de deriva, dos portadores de carga, como se pode justificar que um aparelho elétrico entre em funcionamento quase que instantaneamente? Na realidade a velocidade de deriva é uma velocidade média, e portanto não deve ser confundida com a velocidade de propagação do campo elétrico no condutor, cuja velocidade é ordem da velocidade da luz.

5.2 Propriedades Elétricas dos Condutores

O fluxo dos portadores de carga, ao longo de um condutor, ocorre devido à aplicação de um campo elétrico no condutor. O campo elétrico é estabelecido, pela aplicação de uma diferença de potencial entre os extremos do condutor. A quantidade de corrente que circula no condutor dependerá dessa diferença de potencial e das propriedades físicas do condutor. Define-se a resistência de um condutor pela relação entre a diferença de potencial ΔV e a corrente I que circula no condutor,

$$R = \frac{\Delta V}{I}. \quad (5.9)$$

No sistema de unidades SI, a unidade de resistência elétrica é o **ohm** [Ω]:

$$1 \Omega = 1 \text{ V/1A}.$$

O comportamento dos materiais difere muito frente à relação entre potencial e corrente, $V(I)$. Na Fig. 5.3 o gráfico (a) mostra uma relação linear e representa por exemplo o comportamento de um condutor de cobre ou alumínio. As demais curvas, a curva (b) e a curva (c) representam características não-ôhmicas.

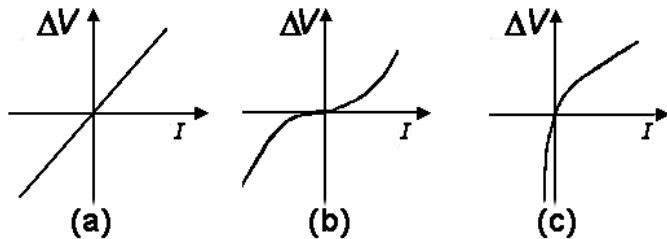


Figura 5.3: Característica tensão-corrente de (a) um condutor metálico a temperatura constante, (b) uma lâmpada incandescente e (c) um diodo semiconductor.

A Fig. 5.3(a) mostra o comportamento de materiais, denominados genericamente de **ôhmicos**, como qualquer metal, pois para eles a relação entre tensão e corrente é mantida constante, em uma gama ampla de tensão e corrente, portanto se verifica a **Lei de Ohm**. A lei de Ohm é uma consequência da proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo elétrico:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (5.10)$$

na qual σ é uma constante característica de um condutor ôhmico, denominada *condutividade*. Pode-se aceitar esta lei de forma empírica, sem explicar as suas causas, para o qual é necessário um modelo quântico da condução elétrica. Como a corrente em função da densidade de corrente é dada por:

$$I = JA = \sigma EA \quad (5.11)$$

e como o campo elétrico é mantido por uma diferença do potencial, se o condutor for retilíneo, pode-se considerar de forma simplificada que:

$$E = \frac{\Delta V}{L}, \quad (5.12)$$

em que L é o comprimento do condutor. Combinando as equações Eq. 5.11 e Eq. 5.12, pode-se calcular a resistência através de

$$R = \frac{EL}{\sigma EA} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A}, \quad (5.13)$$

em que ρ^1 é a resistividade do material. Os valores típicos de condutividade ou resistividade, são apresentados, para alguns materiais, na tabela 5.2, na qual se observa que a ordem de grandeza da resistividade não deixa dúvida para classificação dos materiais em **condutores**, **isolantes** e **semicondutores**.

É oportuno lembrar que todos materiais têm a sua resistividade mais ou menos variável com a temperatura e que para os condutores é uma relação quase linear.

Tabela 5.2: Resistividade, Condutividade e Coeficientes de temperatura para diversos materiais a $20^\circ C$.

Material	Resistividade $\rho_o (\Omega m)$	Condutividade $\sigma_o (\Omega m)^{-1}$	α Coeficiente de Temp. (K^{-1})
Condutores			
prata	$1,59 \times 10^{-8}$	$6,29 \times 10^7$	0,0038
cobre	$1,72 \times 10^{-8}$	$5,81 \times 10^7$	0,0039
alumínio	$2,82 \times 10^{-8}$	$3,55 \times 10^7$	0,0039
tungstênio	$5,6 \times 10^{-8}$	$1,8 \times 10^7$	0,0045
ferro	$9,6 \times 10^{-8}$	$1,042 \times 10^7$	0,0050
platina	$10,6 \times 10^{-8}$	$0,9434 \times 10^7$	0,0039
mercúrio	96×10^{-8}	$0,1 \times 10^7$	0,0009
Ligas Metálicas			
Ni-Cr	100×10^{-8}	$0,1 \times 10^7$	0,0004
Manganina	44×10^{-8}	$0,23 \times 10^7$	0,00001
Semicondutores			
Ge	0,46	2,2	-0,048
Si	640	$1,6 \times 10^3$	-0,075
Isolantes			
Vidro	$10^{10} a 10^{14}$	$10^{-14} a 10^{-10}$	-
Borracha	10^9	10^{-9}	-
Teflon	10^{14}	10^{-14}	-

5.2.1 Efeitos da Temperatura

A resistividade de alguns materiais condutores apresenta uma grande variação com a temperatura mas de forma geral, pode-se representar essa

¹Infelizmente a letra grega ρ para a resistividade é a mesma utilizada para densidade de carga, mas esse uso é generalizado na literatura.

função através da seguinte aproximação linear:

$$\rho = \rho_o[1 + \alpha(T - T_o)], \quad (5.14)$$

na qual o coeficiente de temperatura α , tem valores como os da tabela 5.2, enquanto que ρ_o é a medida da resistividade a 20°C . A Fig. 5.4 abaixo nos mostra a variação da resistividade do cobre em função da temperatura e mostra também a aproximação quase linear dada pela Eq. 5.14.

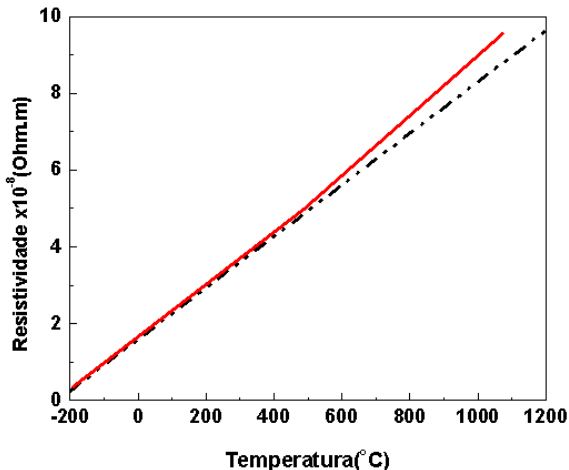


Figura 5.4: Resistividade do cobre em função da temperatura, (linha tracejada), mostrando a aproximação linear com linha cheia.

5.2.2 Corrente Elétrica e Energia Dissipada

A corrente elétrica que circula em um condutor está sempre dirigida no sentido do potencial maior para o menor e o processo de produção de calor nos condutores, ou efeito joule, pela passagem de corrente pode ser comparado ao atrito mecânico. Dessa maneira parte da energia elétrica é perdida sob a forma de calor nas resistências elétricas. Esse calor é utilizado nos aquecedores elétricos. Para calcular o valor da energia produzida, sob a forma de calor, utiliza-se o valor do trabalho necessário para transportar uma carga dq ao longo de uma diferença de potencial V ,

$$dW = Vdq. \quad (5.15)$$

A potência, ou taxa de gasto de energia por unidade de tempo, é dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt}. \quad (5.16)$$

Como a corrente vale $I = dq/dt$, a potência será dada por

$$P = VI. \tag{5.17}$$

Este resultado é independente do tipo de material, ôhmico ou não ôhmico, e também do tipo de portador de carga. No caso dos materiais ôhmicos

$$V = RI, \tag{5.18}$$

na qual a resistência R é uma constante e a potência será dada por:

$$P = VI = V\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{V^2}{R}, \tag{5.19}$$

ou

$$P = VI = (IR)I = I^2R. \tag{5.20}$$

A conversão de energia elétrica em calor, conhecida por *Efeito Joule*, também foi descoberto por Joule, na mesma época do estudo do equivalente mecânico de calor. Na Fig. 5.5 aparece um circuito de uma fonte (bateria ou pilha) no qual existe apenas um elemento passivo, uma resistência elétrica. A fonte de energia elétrica representada por uma fonte ideal mais uma resistência interna r . Dessa forma verifica-se que a energia produzida na *fem* é utilizada para produzir calor na carga R e na fonte, que também aquece.

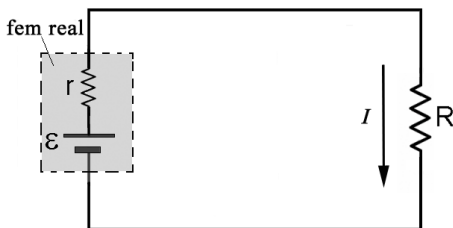


Figura 5.5: Fonte de força eletromotriz(fem) real alimentando um circuito resistivo.

O circuito da Fig. 5.5 possibilita a análise de dois problemas relativos à geração e à transformação em calor da energia elétrica. O primeiro é a fonte de força eletromotriz que necessita entregar uma quantidade de trabalho por unidade de carga, ou *fem*, e o segundo é a perda de energia na própria fonte.

A *fem* é dada por:

$$\epsilon = \frac{dW}{dq}. \tag{5.21}$$

Quando se considera uma fonte ideal, com resistência interna nula, essa energia é igual à energia dissipada na resistência para produzir calor, portanto

$$\epsilon = IR, \quad I = \frac{\epsilon}{R}. \quad (5.22)$$

Na realidade todas as fontes de energia possuem uma resistência interna "r" cujo valor, no caso das pilhas e baterias, varia com a carga disponível aumentando com o tempo de uso das mesmas. Considerando que o circuito possua uma resistência total $R_{eq} = R + r$, pode-se escrever a Eq. 5.22, da seguinte forma:

$$\epsilon - Ir - IR = 0, \quad I = \frac{\epsilon}{R + r}. \quad (5.23)$$

A potência fornecida pela bateria, que será transformada em calor na resistência R , será dada por, Eq. 5.24:

$$P = VI = RI^2 = \frac{R\epsilon^2}{(R + r)^2}. \quad (5.24)$$

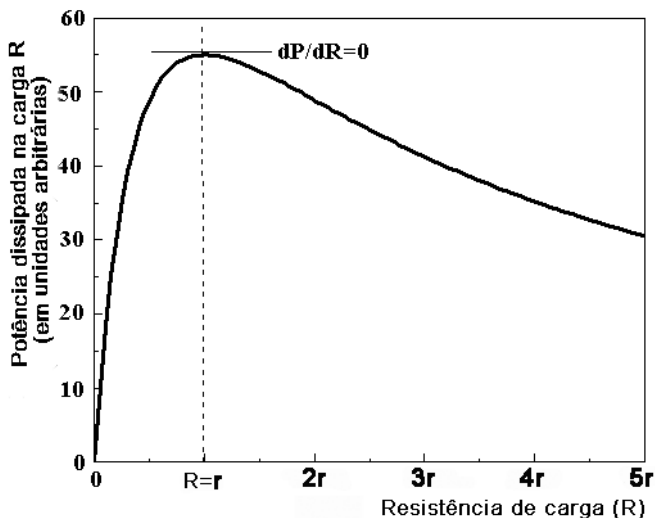


Figura 5.6: Potência dissipada em função da resistência R da carga, conforme a Eq. 5.24.

O valor máximo dessa função dP/dR ocorre para $R = r$, como se pode verificar na Fig. 5.6. Isto quer dizer que existe uma forma ótima de

acoplamento entre a fonte e a carga, quando as mesmas são iguais, também chamado de acoplamento ótimo. A derivada da equação 5.24, será:

$$\frac{dP}{dR} = \epsilon^2 \left[(R+r)^{-2} - \frac{2R}{(R+r)^3} \right] = \epsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}. \quad (5.25)$$

A condição de derivada nula ocorrerá para o denominador nulo ou seja para $R = r$, como é mostrado na Fig. 5.6.

5.2.3 Efeito Joule e dimensão dos Condutores

A energia dissipada nos resistores (RI^2), sob a forma de calor, é devida ao efeito Joule; esse calor é transmitido ao ambiente por radiação e convecção, mantendo os resistores em uma dada temperatura, função da condição de equilíbrio térmico, ou seja, o calor produzido no resistor é igual ao transmitido ao ambiente. A quantidade de calor produzida em qualquer condutor é proporcional ao seu volume enquanto que a dissipação nos dois processos é proporcional à área externa do mesmo e dessa maneira esse problema constitui, teoricamente, um problema de autovalores.

Essa perda de energia ao longo do condutor pode ser verificada experimentalmente medindo-se o potencial ao longo do condutor, pois a resistência do mesmo vai produzindo uma queda de tensão que depende da sua resistência e da corrente que circula no mesmo a queda de tensão ao longo será então dada por:

$$\Delta V = RI = \frac{\rho L}{A} I, \quad (5.26)$$

portanto, dependente do comprimento do condutor e de sua seção transversal, cujo cálculo deverá ser feito para uma dada corrente. Em geral o comprimento do condutor é fixo e determina-se o diâmetro do condutor que permita limitar a queda de tensão a um valor estabelecido, que em geral se encontra entre 3 e 5 por cento da tensão de alimentação.

Do ponto de vista prático o condutor resistor deve funcionar a uma dada temperatura compatível com as suas propriedades físicas. Para exemplificar usaremos o caso dos condutores de cobre utilizados nas instalações elétricas; neles o condutor de cobre é recoberto por um isolante plástico cujo limite de temperatura é de 60 a 70°C. Por isso a corrente elétrica deve ser limitada tal que o calor por efeito Joule seja igual ao calor dissipado por radiação e convecção nessa temperatura limite.

Até atingirmos essa condição podemos definir a condição termodinâmica de aquecimento através do seguinte balanço de energia:

$$RI^2 - Q_c - Q_r = mc_p \frac{dT}{dt} \quad (5.27)$$

na qual Q_c e Q_r representam respectivamente a energia dissipada por convecção e por radiação, em um condutor de massa m , capacidade calorífica c_p e resistência R quando percorrido por uma corrente I .

Durante o aquecimento ocorre um estado transitório definido pela Eq. 5.27 e ao atingir o equilíbrio teremos $\frac{dT}{dt} = 0$, portanto a Eq. 5.27 será escrita como

$$RI^2 - Q_c - Q_r = 0. \quad (5.28)$$

Deve-se levar em consideração que esta é uma análise simplificada que não leva em consideração outros fatores como as fontes de energia externa ao condutor que por acaso existam, como a energia de irradiação solar no caso de condutores ao ar livre, bem como forma dos condutores e materiais dos eletrodutos.

A partir da Eq. 5.28 pode-se escrever a capacidade de condução de corrente por um condutor, também denominada ampacidade na literatura técnica, pode ser calculada por

$$I = \sqrt{\frac{Q_c + Q_r}{R(T_c)}} \quad (5.29)$$

Lembrando que a resistência do condutor depende da temperatura T_c através da relação

$$R(T_c) = R_{20}[1 + \alpha(T_c - 20)], \quad (5.30)$$

a resistência de um condutor cilíndrico de diâmetro d e comprimento L e resistividade ρ a 20°C é dada por

$$R_{T_c} = \frac{4\rho L}{\pi d^2}[1 + \alpha(T_c - 20)]. \quad (5.31)$$

No caso da corrente ser alternada a resistência também deve ser corrigida pela frequência da mesma.

Finalmente apenas como exemplo vamos considerar o caso em que o resfriamento se dá apenas por radiação ou seja da Eq. 5.29 poderá ser escrita como:

$$I = \sqrt{\frac{Q_r}{\frac{4L\rho[1+\alpha(T_c-20)]}{\pi d^2}}}. \quad (5.32)$$

Considerando a Lei de Stefan Boltzmann para a energia radiada

$$Q_r = \epsilon\sigma A(T_c^4 - T_A^4) = \epsilon\sigma\pi dL(T_c^4 - T_A^4) \quad (5.33)$$

na qual T_c e T_A são respectivamente as temperaturas do condutor e temperatura ambiente, ϵ , é a emissividade do condutor e $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

é a constante de Stefan-Boltzmann e A é a área superficial do condutor. Para um condutor cilíndrico a corrente na condição de equilíbrio térmico será dada por

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon\sigma\pi^2 d^3 (T_c^4 - T_A)}{4\rho[1 + \alpha(T_c - 20)]}}. \quad (5.34)$$

A determinação do diâmetro necessário para conduzir uma determinada corrente é um problema interessante que pode seguir dois caminhos. O primeiro é utilizar a expressão da ampacidade, para a condição de equilíbrio térmico, portanto

$$d = \sqrt[3]{I^2 \frac{4 \times \rho [1 + \alpha(T_c - 20)]}{\epsilon\sigma \times \pi^2 \times (T_c^4 - T_A)}}. \quad (5.35)$$

A outra possibilidade para a determinação do diâmetro do condutor, mais simples é considerar um percentual para a queda de tensão no fim do condutor como um percentual da tensão utilizada ou seja:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{RI}{V} \quad (5.36)$$

Para um condutor cilíndrico teremos

$$\Delta V = \frac{4\rho[1 + \alpha(T_c - 20)]L}{\pi d^2} I. \quad (5.37)$$

A expressão para o diâmetro será então:

$$d = \sqrt{\frac{4\rho[1 + \alpha(T_c - 20)]LI}{\pi\Delta V}}. \quad (5.38)$$

Os resultados do cálculo do diâmetro do condutor feito pela Eq. 5.35 não necessariamente dão o mesmo resultado da Eq. 5.38 pois são critérios simplificados independentes mas servem como guia para orientar o cálculo dos condutores, em geral limitados por normas técnicas específicas.

5.3 Modelo de Drude para a Resistividade

Como já se afirmou na seção anterior, o modelo para condução elétrica deve incluir o tratamento quântico. Pode-se utilizar um modelo de elétrons livres semiclássico, denominado *modelo de Drude* (*Paul Drude*), para estudar a condução nos metais. O modelo parte da ideia de que os elétrons de condução se comportam como livres, tal como em um gás, por isso se utiliza o termo *gás de elétrons*. Nesse modelo a corrente elétrica é produzida pela aceleração dos elétrons, que se chocam com os átomos do meio condutor,

produzindo-se um efeito térmico resultado do atrito dos elétrons com a estrutura atômica do condutor. Como a força de atrito é proporcional à velocidade das partículas, pode-se fazer uma aproximação linear,

$$F = ma = -eE - bv, \quad (5.39)$$

em que b é uma constante que deve ter unidades de *massa/tempo*, portanto utilizando a análise dimensional, pode-se supor que:

$$b = m/\tau,$$

em que m e τ são a massa e tempo característicos dos elétrons. Supondo que a força do campo elétrico seja contrabalançada pela força de atrito, ou seja, o movimento não será acelerado, portanto:

$$ma = -eE - \frac{mv_d}{\tau} = 0. \quad (5.40)$$

Isto leva a encontrar a velocidade de deriva

$$v_d = -\frac{eE\tau}{m},$$

em que o sinal negativo indica que a corrente é contrária à direção do campo elétrico. Dessa forma pode-se obter a densidade de corrente:

$$J = -n_e e v_d = \frac{n_e e^2 \tau}{m} E. \quad (5.41)$$

Comparando com a lei de Ohm, equação 5.10, resulta na expressão para a condutividade:

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m}. \quad (5.42)$$

O modelo aplicado, utilizando a análise dimensional, permite interpretar "m" como sendo a massa do elétron e τ como o tempo médio entre dois choques, tal como em um gás, no qual o movimento das partículas é caracterizado pelo livre caminho médio λ ,

$$\tau = \frac{\lambda}{v_d}.$$

Dessa maneira a resistividade pode ser escrita,

$$\rho = \frac{mv_d}{n_e e^2 \lambda}.$$

Este modelo clássico permite entender a condução, mas as medidas experimentais indicam que a velocidade dos elétrons nos metais é um pouco maior

do que a do modelo. Além disso a velocidade dos elétrons livres é função da temperatura, portanto o livre caminho médio também o é. Por tudo isso, é necessário ampliar o modelo introduzindo outros conceitos de física quântica o que foge dos objetivos desta análise. Mesmo assim, é possível tirar algumas conclusões importantes, para os condutores metálicos.

Considere-se, por exemplo, o caso do sódio metálico que possui uma densidade atômica de $2,5 \times 10^{22}$ *atomos/cm*³. A mobilidade dos seus portadores de carga, definida pelo tempo característico, τ , pode ser obtida utilizando a Eq. 5.42, a partir da conectividade ou da resistividade, medidas experimentalmente, resultando em $\tau = 3 \times 10^{-14}$ s. Para avaliar se esse tempo é longo ou curto, pode-se utilizar uma velocidade de referência de 10^7 *cm/s*, correspondente a elétrons termalizados, resultando um percurso de aproximadamente 30 *angstroms* durante esse período de tempo. Esse valor equivale a aproximadamente 20 espaçamentos atômicos, característicos da rede cristalina. Dessa maneira pode-se concluir que existe uma grande transparência dos metais ao movimento de elétrons.

5.4 Condutores, Isolantes e Semicondutores

Desde a invenção dos transistores (1947), a indústria a ciência e mesmo as pessoas, individualmente, vivenciaram uma revolução devida ao crescimento da eletrônica. O conhecimento acerca das propriedades eletrônicas dos materiais, tornou-se fundamental para entender essa evolução. Como exemplo, os transistores se baseiam no uso do silício, que na sua forma natural é um mau condutor ou semicondutor à temperatura ambiente. No entanto ao adicionar uma quantidade muito pequena de alguns contaminantes, tais como boro, alumínio ou arsênio, a sua condutividade aumenta. De forma muito simples esse fato pode ser explicado assim: o silício possui quatro elétrons e o arsênio possui 5 nas ultimas camadas. Este elétron extra do arsênio pode se movimentar ao longo da estrutura cristalina, quando se aplica um campo elétrico, portanto o elétron extra será responsável por algumas das propriedades semicondutoras do silício.

Para melhor entender o funcionamento dos semicondutores é importante conhecer a teoria eletrônica nos metais, mas a aplicação desta teoria não se limita aos semicondutores pois ela também é capaz de fazer entender as propriedades óticas, magnéticas e térmicas dos materiais. Em outras palavras, a teoria eletrônica fornece os fundamentos para a tecnologia que faz a vida do presente mais confortável. Alguns exemplos da vida cotidiana podem ilustrar este fato. Os materiais magnéticos e elétricos são utilizados em geradores, motores, altofalantes e gravadores; as propriedades térmicas dos materiais são fundamentais para refrigeração e aparelhos de aquecimento,

bem como blindagem de calor nas naves espaciais.

A utilização das propriedades elétricas dos materiais é, em geral, muito bem conhecida por todos, alguns materiais são muito bons condutores, como o ouro e o cobre, outros são bons isolantes como a porcelana e o quartzo. Mas para entender as razões desses fatos, a ferramenta fundamental é a teoria atômica moderna ou física quântica cuja base é a teoria ondulatória da matéria cujo escopo foge dos objetivos destas notas. Apenas, como base introdutória ao tema, pode-se dizer que a teoria ondulatória da matéria foi introduzida por Louis de Broglie, sugerindo que o caracter dual da luz, ou seja ondulatório e corpuscular, onda e fóton, deveria ser também uma propriedade da matéria. Os elétrons, deveriam, portanto ter esse caracter duplo, partícula e onda. Estes dois aspectos das partículas atômicas foram comprovados, através de experimentos ondulatórios, como a polarização e a difração.

Um elétron livre é caracterizado pelo seu comprimento de onda, também chamado comprimento de onda de De Broglie, dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (5.43)$$

Quando se considera o elétron confinado em um potencial como o do átomo, em um potencial coulombiano, a teoria quântica prevê a existência de n órbitas fechadas que constituem os níveis atômicos. Dessa maneira os elétrons adquirem algumas energias discretas e só podem se movimentar nesses orbitais, cujo valor é dado por:

$$E_n = -\frac{me^4}{e\hbar} \frac{1}{2n^2}, \quad (5.44)$$

em que "n" é um número inteiro que representa a quantização de energia. O resultado pode ser apreciado na Fig. 5.7 que apresenta a estrutura de níveis atômicos, do hidrogênio, prevista pela teoria quântica, mostrando que com o crescimento da energia os níveis se juntam tornando-se muito próximos. A energia do primeiro nível é conhecida com a energia de ionização do hidrogênio, para $n = 1$.

No caso dos materiais cristalinos (sólidos), os elétrons se movem em potenciais periódicos que correspondem à rede cristalina, formada por fileiras de átomos. Considerando uma dessas fileiras, pode-se observar o potencial periódico, na Fig. 5.8(a). Quando um elétron se desloca ao longo desse potencial periódico, que na realidade é tridimensional, os estados quânticos na rede cristalina, além de discretos agrupam-se em bandas ou faixas de energia, dentro das quais os intervalos de energia são contínuos. A cada nível atômico n corresponde uma banda de energia no estado sólido. O espaço entre bandas corresponde ao gap de energia, ΔE_g , em que os estados quânticos não são permitidos, conforme mostra a Fig.5.8(b). As energias permitidas dentro

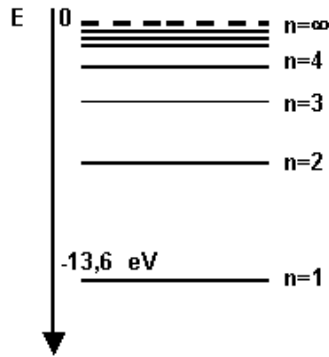


Figura 5.7: Níveis de Energia de ligação do hidrogênio atômico para diferentes números quânticos (n), cada um representando um nível eletrônico principal.

de cada banda formam um espectro contínuo ou seja os elétrons podem ter qualquer valor de energia no interior da banda. No caso da banda de condução, na qual podem existir níveis quânticos vazios, como nos condutores, há a possibilidade de ganhos e perdas de energia em função da temperatura.

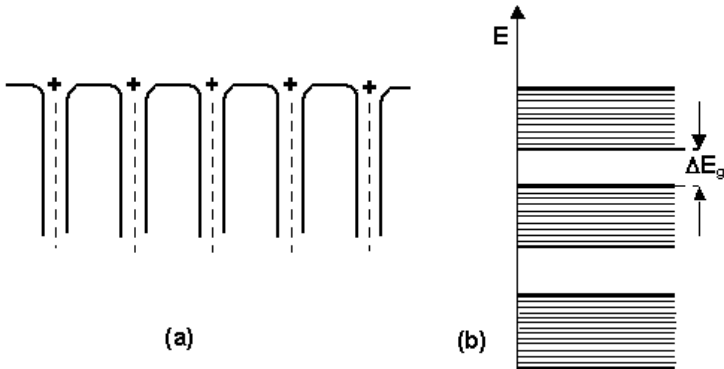


Figura 5.8: (a) Potencial devido a uma rede cristalina, (b) Diagrama de níveis, formando bandas de energia.

5.4.1 Condutores e Isolantes

Nos condutores, ou metais típicos a banda de mais alta de energia, na qual se encontram os elétrons de condução, está semi-preenchida até o nível da energia de Fermi, como mostra a Fig. 5.9(a). A temperatura ambiente é suficiente para excitar os elétrons dentro da banda de condução acima da energia de Fermi E_F , com ganhos e perdas de energia em torno da mesma.

A caracterização dos materiais como isolantes e condutores é muito simples, pois a diferença de condutividade ou resistividade dos mesmos é significativa, como nos mostra a comparação mostrada na tabela 5.2. Sob o ponto de vista da teoria de bandas também se observa uma diferença substancial, pois no caso dos isolantes, como mostra a Fig. 5.9(b), a última camada com elétrons está totalmente preenchida e a seguinte ou banda de condução está totalmente vazia. Nos isolantes o gap de energia ΔE_g , é muito grande não permitindo que os elétrons passem para a condução mesmo a temperaturas altas.

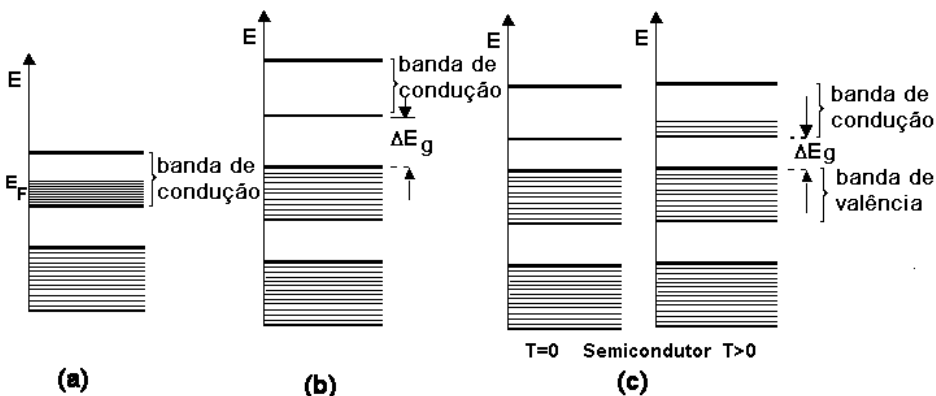


Figura 5.9: (a) Diagrama de bandas em um condutor (b) Diagrama de bandas em um isolante, (c) Diagrama de bandas em um semicondutor intrínseco (cristal puro).

A função distribuição estatística dos elétrons em equilíbrio térmico é bem diferente da distribuição clássica ou de Maxwell-Boltzmann para os gases rarefeitos. Aqui, a distribuição de estados quânticos é a distribuição de Fermi, na qual a energia é tratada como uma variável quase contínua. A uma temperatura $T = 0 K$ a energia máxima da distribuição é dada pela energia de Fermi E_F . Considerando a energia cinética média dos elétrons como sendo

$3/2kT \cong 0,04eV$ sendo, portanto, muito menor que o valor de E_F tanto no caso dos isolantes como semicondutores. Apesar dessa diferente distribuição ainda se costuma utilizar o fator de Boltzmann, $e^{-E/kT}$ para caracterizar a função distribuição de estados; na k a constante de Boltzmann. O fator de Boltzmann, caracteriza os números de ocupação de níveis cuja diferença de energia seja E .

5.4.2 Semicondutores Intrínsecos e Extrínsecos

Os isolantes elétricos possuem uma estrutura de bandas na qual a de valência está completa e com uma separação ΔE_g (gap) com a seguinte vazia, de alguns eV . Os semicondutores possuem uma estrutura de bandas semelhante à dos isolantes, como nos mostra a Fig. 5.9(c), apenas com uma menor separação entre a banda de valência e de condução, capaz de facilitar a excitação de elétrons por aumento de temperatura. Ao contrário dos condutores mais característicos a resistividade dos semicondutores diminui com a temperatura. Dessa forma pode se dizer que os semicondutores tornam-se condutores somente a temperaturas muito elevadas.

O silício e o Germânio puros (intrínsecos) possuem respectivamente um gap de $1,1 eV$ e $0,7 eV$ e desta maneira o mecanismo de condução nos **semicondutores intrínsecos**, que são cristais puros, é devida à passagem de elétrons de valência para a banda de condução por excitação térmica. Para cada elétron que passa para a banda de condução gera-se uma lacuna ou falta de elétron na banda de valência, uma pseudo carga elétrica. Dessa maneira deve-se considerar uma corrente de elétrons e outra de lacunas em sentido contrário.

A probabilidade de que um elétron possa transpor o gap ΔE_g por energia térmica pode ser avaliado considerando-se que o valor do fator de Boltzmann é muito sensível à temperatura e torna-se dominante no sentido de aumentar os portadores de carga de condução. O coeficiente de temperatura para os semicondutores, conforme se pode observar na tabela 5.2, é negativo em virtude do caracter dominante da variação dos portadores de carga de condução sobre a diminuição do livre caminho médio entre colisões.

O silício e o germânio são semicondutores típicos mas, existem outras substâncias semicondutoras, como o arseneto de gálio e o carbetto de silício.

A condução dos semicondutores pode ser melhorada introduzindo impurezas, doadoras ou receptoras de elétrons, reforçando a corrente tanto de elétrons como de lacunas. Esse processo, conhecido como *dopagem*, produz os chamados **semicondutores extrínsecos**.

O processo de dopagem dos semicondutores puros permite melhorar a condução elétrica, por meio da adição de pequenas quantidades de elementos doadores e receptores de elétrons de valência. O silício é um elemento do

grupo IV, portanto com 4 elétrons, portanto ao adicionar uma impureza à estrutura cristalina que tiver cinco elétrons de valência, esta se comportará como doador de elétrons formando um semiconductor do tipo *n*. Materiais como o fósforo, antimônio e o arsênio são doadores e capazes de fornecerem elétrons permitindo que o semiconductor se transforme em um semiconductor tipo *n*. Por outro lado quando a impureza é trivalente, ou receptora, como o boro, gálio, índio e o alumínio, criam-se no silício vagas de elétrons ou lacunas, originando-se uma condução positiva por falta de elétrons, também denominada corrente de buracos. O semiconductor dopado por impurezas trivalentes é denominado semiconductor tipo *p*.

Essa substituição de átomos doadores ou receptores, na rede cristalina, é mostrada na Fig. 5.10. Os doadores possuem os diagramas de níveis, como indica a Fig. 5.11, mostrando que o nível do doador está próximo à banda de condução permitindo a passagem de elétrons por agitação térmica. Os receptores, possuem os seus níveis nas proximidades da banda preenchida, permitindo a formação de buracos na mesma também por agitação térmica.

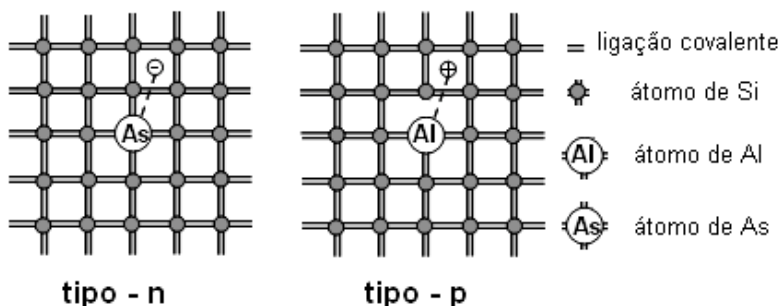


Figura 5.10: Diagrama esquemático da rede cristalina, mostrando as impurezas semicondutoras tipo *n* e *p*.

Para que a variação da condutividade de um semiconductor se torne significativa é necessário adicionar a impureza em concentrações da ordem de ppm (parte por milhão) de átomos semicondutores. Os semicondutores são utilizados como em diodos transistores, células fotoelétricas e chips de computadores e sensores de ampla aplicação.

5.4.3 Diodos Semicondutores

Quando dois semicondutores, um do tipo *p* e outro *n*, são colocados em contato físico, formando uma junção (diodo) observa-se o aparecimento de uma barreira de potencial na fronteira entre os dois materiais. A estrutura de

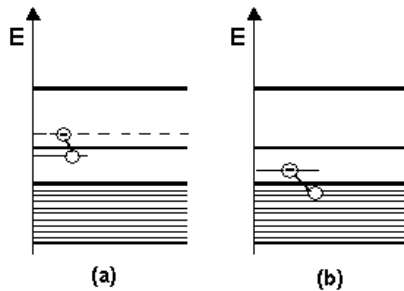


Figura 5.11: Mecanismo de dopagem nos semicondutores, (a) impureza doadora, (b) impureza receptora.

bandas de uma junção $p-n$ é mostrada na Fig. 5.12 com a estrutura de bandas de valência e de condução, bem como os níveis dos doadores e receptores. A interface entre os dois semicondutores, na qual se estabelece a barreira de potencial, é denominada, camada de depleção. Quando um potencial externo é aplicado ao diodo, o campo externo pode reforçar a barreira de potencial, ou pode anular, fazendo com que a condução seja dificultada ou facilitada, o que resulta em uma resistência direta e inversa, completamente diferentes. Nesse processo o diodo conduz em um sentido mas não no outro, como mostra a Fig. 5.13, onde a corrente cresce rapidamente para o potencial positivo, e praticamente nula para tensão inversa. Nessa mesma figura se observa a tensão de ruptura inversa, acima da qual o diodo rompe. A Fig. 5.13 mostra os símbolos do diodo semicondutores e a designação da polaridade dos mesmos.

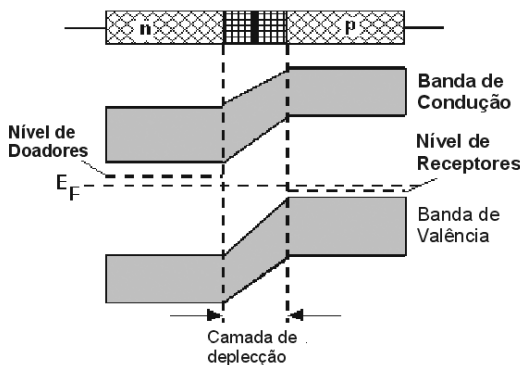


Figura 5.12: Junção $p-n$ e diagrama de níveis dos doadores e receptores.

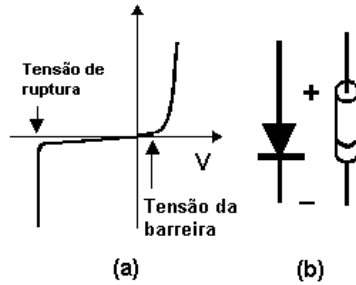


Figura 5.13: (a) Curva característica de uma junção n-p, formando um diodo semiconductor, (b) Símbolos do diodo.

5.4.4 Supercondutores, Teoria BCS

A temperaturas muito baixas, da ordem de alguns graus K , alguns materiais apresentam a propriedade da supercondutividade. Esta propriedade foi descoberta em 1911 por *Kammerling Onnes* em Leiden na Holanda, ao estudar a variação da resistividade do mercúrio em função da temperatura. Nas proximidades da temperatura de $4,15 K$ a resistividade cai a zero, como mostra a Fig. 5.14(a). Essa temperatura é chamada de temperatura crítica. O processo pelo qual ocorre a supercondutividade só foi explicado pela teoria da supercondutividade desenvolvida em 1957, por *Bardeen, Cooper e Schrieffer*, que valeu o prêmio Nobel. Nessa teoria, chamada de *BCS*, a supercondutividade é explicada pela interação dos elétrons e a rede cristalina através de fónons. O par elétrons denominados (*par de Cooper*), possui energia inferior à dos dois elétrons livres. Quando esses dois elétrons se movem ao longo do cristal, produzem uma perturbação momentânea dos íons da rede. A interação entre os elétrons do par pode ser melhor entendido através da Fig. 5.14(b).

Considerando que um dos elétron perturba instantaneamente os íons ao passar por eles, deformando a rede, o segundo elétron é então atraído por essa região positiva. A ligação efetiva entre os dois elétrons, que ocorre nesse momento da interação com a rede, exige uma energia mínima para dissociar o par de elétrons. A baixas temperaturas, o par de elétrons se movimenta insensível às colisões, permitindo a existência de corrente com resistividade nula, ou seja, sem atrito. Atualmente existe uma pesquisa muito intensa no sentido de produzir materiais supercondutores com temperatura crítica elevada. Em 1986 K. Alex Muller e J. George Bednorz descobriram uma classe de materiais supercondutores com temperatura crítica acima de $120K$.

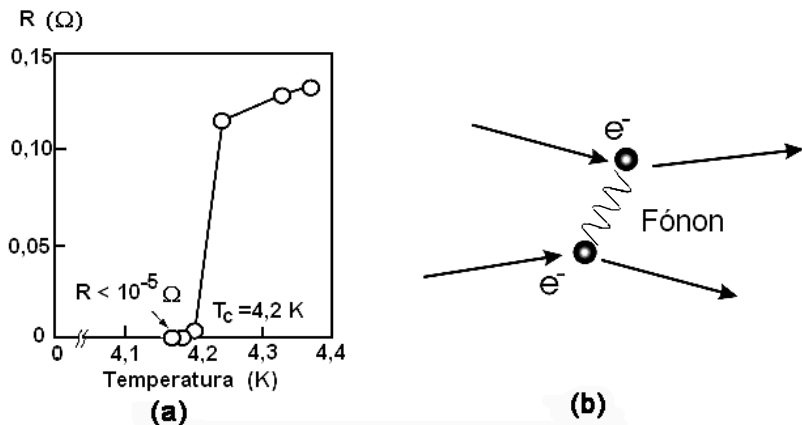


Figura 5.14: Supercondutividade, (a) gráfico obtido por Kamerlingh Onnes da resistência do mercúrio em função da temperatura, mostrando a diminuta resistência à temperatura crítica; (b) formação de um par de Cooper, elemento fundamental da teoria BCS da supercondutividade, mostrando a interação entre elétrons através de um fónon ou quantum acústico.

Efeito Josephson

A associação de dois supercondutores, formando uma junção através de uma película de isolante elétrico, usualmente alguns nanômetros $\sim 10 \text{ \AA}$ de espessura, formam uma **Junção Josephson**, desenvolvida em 1962 por Brian Josephson. O estudo desta junção levou a estudar o efeito de tunelamento dos pares de Cooper mesmo que não haja tensão aplicada à junção, conforme mostra a Fig. 5.15. Quando não se aplica uma tensão à junção, a corrente de pares através da mesma até à corrente crítica depende da temperatura e do campo magnético. Por outro lado quando se aplica uma diferença de potencial contínua, a corrente de pares de Cooper oscila com uma frequência que depende da tensão aplicada através da equação $f = 2eV/h$. Quando a tensão aplicada é alternada, se observa que a frequência de oscilação dos pares de Cooper pode tornar-se ressonante com a frequência da tensão aplicada, aparecendo uma tensão contínua entre os pares da junção. Existem inúmeras aplicações desta junção, desde padrões de medida de tensão até memórias, mas sob o ponto de vista da física básica, destaca-se a possibilidade de medida da relação e/h com grande precisão. A unidade de tensão pode agora ser definida com sendo a tensão necessária para produzir a frequência de $483.597,9 \text{ GHz}$ na junção Josephson. Sob a ação de campos magnéticos externos, as junções

apresentam diferentes estados de equilíbrio que permite utilizar a junção como memória.

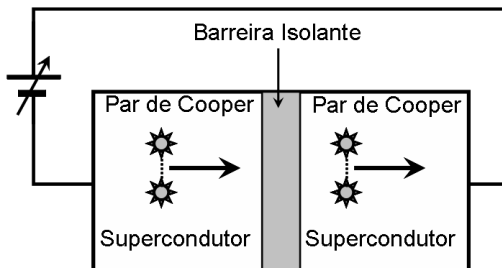


Figura 5.15: Circuito destinado a analisar uma junção Josephson.

5.5 Fontes de Força Eletromotriz

A chamada força eletromotriz fem , em si, é qualquer mecanismo de transporte de cargas no sentido oposto ao campo elétrico, gerador de uma diferença de potencial. Um dos exemplos mais simples é a geração de carga eletrostática por atrito que ocorre no gerador de Van der Graaff, em que é necessário aplicar uma força para movimentar a correia que transporta carga elétrica no sentido contrário ao campo elétrico. O termo fem pode levar a uma certa confusão, pois não se trata de uma fonte de força e sim uma fonte de energia. Quando se pensa em fontes de fem , existem várias possibilidades, desde baterias que convertem energia química em eletricidade até células solares que convertem diretamente energia solar em fem . Além desses, existem os tradicionais geradores elétricos que a partir de calor, obtido da queima do carvão do gás ou mesmo da energia nuclear produzem fem .

5.5.1 Baterias Ácido Chumbo

Quando se colocam dois eletrodos de diferentes metais em um banho ácido, produz-se uma diferença de potencial através desses dois polos. A bateria produz uma voltagem pela reação química entre as duas placas, ou eletrodos colocados no eletrólito. No caso das baterias ácido chumbo, utilizada nos automóveis, a placa positiva é feita de dióxido de chumbo (PbO), enquanto que a placa negativa é feita de chumbo metálico (Pb) também chamado chumbo esponja. O ácido é uma mistura de ácido sulfúrico e água, também denominado ácido muriático. Na Fig. 5.16(a) pode-se observar uma

dessas células capaz de produzir 2,1 volts. O eletrólito é uma mistura de 36% de ácido sulfúrico (H_2SO_4) e 64% de água destilada (H_2O). As baterias devem possuir uma densidade especifica de 1,270 a $20^\circ C$ quando totalmente carregadas. A medida da densidade do eletrólito permite verificar a carga da baterias. Na Fig. 5.16(b) se observa, movimento de íons, quando circula uma corrente elétrica.

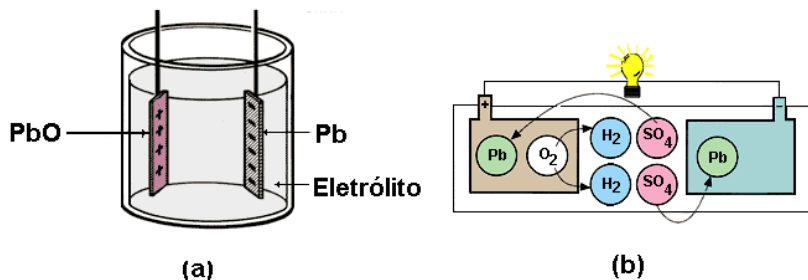
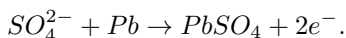
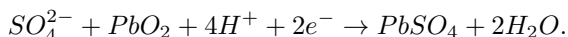


Figura 5.16: Bateria ácido chumbo; (a)esquema de uma célula ácido-chumbo; (b) movimento de ions entre as placas da célula ácido chumbo, ($H_2SO_4 - Pb$).

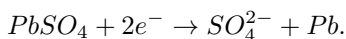
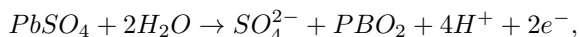
O eletrólito, dentro da bateria, é uma solução de ácido e água, na qual as moléculas separam-se em íons positivos, H^+ e negativos SO_4^{2-} . Os íons negativos combinam-se com o chumbo do eletrodo positivo formando o sulfato de chumbo ($PbSO_4$),



Nesta reação se liberam dois elétrons, fazendo com que o potencial do eletrodo negativo diminua. Quando os eletrodos da bateria são ligados a uma carga, os elétrons que chegam ao eletrodo positivo combinando-se com o dióxido de chumbo e o ácido sulfúrico do eletrólito, produzindo água e sulfato de chumbo, diminuindo dessa forma a concentração de ácido,



As reações acima são reversíveis, sendo possível recarregar a bateria com uma corrente inversa. Os elétrons entram no eletrodo negativo e saem do eletrodo positivo. Dessa maneira, as reações nos eletrodos são respectivamente,



A concentração de ácido aumenta e o sulfato acumulado nos eletrodos desaparece, o que constitui a carga da bateria. A fem de uma célula deste tipo de bateria é de $2,1V$, mas à medida que ocorre a descarga, a fem vai diminuindo até atingir $1,8V$, quando a bateria deve ser recarregada. Devido à evaporação, pois a bateria também aquece é necessário medir a densidade do eletrólito utilizando um densímetro e se considera que uma bateria deva ser recarregada quando atinge uma densidade inferior a $1,230$ que corresponde a 75% da carga. No caso das baterias seladas, o densímetro é incorporado a uma das células e através de um código de cores indica o estado de carga.

5.5.2 Outras fontes de fem

Além dos geradores elétricos, cujos princípios estão baseado na indução magnética, e as baterias e pilhas elétricas, podem-se citar três outros geradores, que fazem parte do nosso dia a dia.

- Célula Fotovoltaica

A célula fotovoltaica ou célula solar pode ser considerada com um diodo de silício de grandes dimensões. Quando o Si é dopado, pode ser formar o Si do tipo p e silício do tipo n. Um diodo é formado por duas camadas, uma do tipo p e outra do tipo n, com é mostrado na Fig 5.12. Os elétrons se difundem para a camada p, formando uma barreira de potencial, ou um campo elétrico, que permite que a corrente elétrica tenha uma direção preferencial. Este campo elétrico permite a separação de elétrons e buracos, criados pela absorção da luz solar. Quando os elétrons e buracos são separados pode-se extrair energia do circuito. As células solares, como as mostradas na Fig. 5.17, são utilizadas como fontes de energia elétrica alternativa, especialmente em locais longínquos, como satélites, estações de radiobase, radares em estradas, sinalização através de faróis etc.

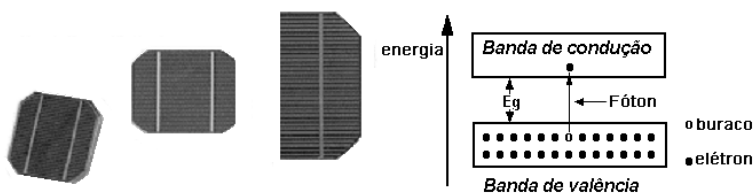


Figura 5.17: Células fotovoltaica e princípio de funcionamento

- Termopar O termopar é baseado no efeito Seebeck, ilustrado na Fig. 5.17 em que um par de diferentes condutores ou semicondutores, formam

uma junção que mantida a uma temperatura alta, produz uma diferença de potencial, proporcional à diferença de temperatura entre a junção e o ambiente. O efeito Seebeck foi observado pela primeira vez em

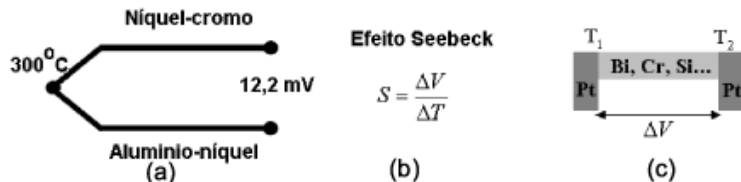


Figura 5.18: Esquema de um termopar mostrando:(a) Termopar de NiCr-AlNi; (b) Definição do efeito Seebeck, S; (c) que a diferença de potencial gerado depende da temperatura e do tipo de par dos metais utilizados.

1821 quando o físico T. J. Seebeck estudava fenômenos termoeletrônicos e pode ser demonstrado facilmente em um circuito, mostrado na Fig. 5.18 formado por dois condutores metálicos diferentes A e B, quando as duas junções estão a temperaturas diferentes T_1 e T_2 , no circuito circula uma corrente I produzida por uma força eletromotriz cuja grandeza é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre as duas junções: $S = \frac{\Delta V}{\Delta T}$.

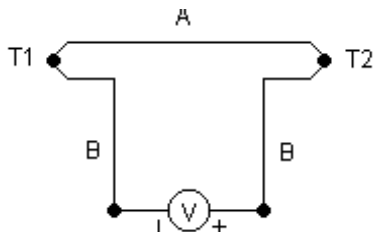


Figura 5.19: Esquema de observação do efeito Seebeck.

- Microfones

Os microfones são transdutores que detectam um sinal sonoro e produzem uma imagem elétrica do som, ou seja, produzem uma corrente proporcional ao sinal sonoro. Os microfones mais comuns estão na Fig. 5.20, na qual se pode observar o princípio de funcionamento. No **microfone dinâmico**, nos mostra uma bobina que se move, solidária a uma membrana, dentro de um campo magnético, produzindo uma corrente

elétrica análoga ao som que a movimentar. No caso do **microfone capacitivo**, a membrana ao movimentar-se altera a capacidade, produzindo uma corrente no circuito. No caso do **microfone de cristal**, devido ao efeito piezoelétrico, a compressão produzida por uma membrana sobre o cristal produzirá a corrente elétrica.

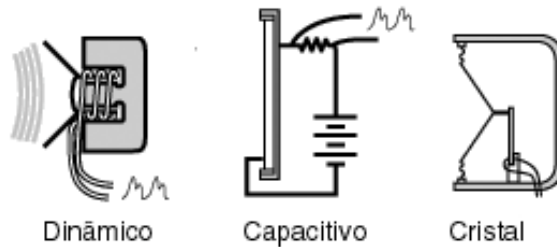


Figura 5.20: Fundamento da geração de eletricidade pelos microfones

5.6 Aplicações Científicas e Tecnológicas

5.6.1 Chuveiros e Aquecedores com Acumulação

Um dos aparelhos elétricos mais populares na nossa sociedade é o chuveiro elétrico, especialmente na região sudeste e sul tornou-se um aparelho doméstico indispensável à vida diária da família. Imaginando uma situação ideal em que cada família do sul e sudeste tivesse um chuveiro de 5 kW , para uma estimativa de 25 milhões de moradias seria necessária uma potência instalada de 125 GW , bem maior do que a potência total instalada para todo o país. Assim o seu custo individual, de algumas dezenas de reais, não reflete a necessidade de investimento para o seu funcionamento.

No nosso país, existem muitas soluções energéticas ainda pouco populares. Uma delas é o aquecimento de água por energia solar, cuja viabilidade deve ocorrer quando os financiamentos da casa própria, mesmo populares, incentivarem o seu uso, pois as energias alternativas dependem de políticas públicas. Além do problema da potência instalada ser muito grande, o uso do chuveiro apresenta muitos problemas, mas o principal é a sua falta de segurança. Faça-se uma enquete entre amigos para verificar quem ainda não sofreu um pequeno choque ao girar a torneira da ducha. Qual a solução? Uso de duchas com resistência blindada? Sim, esta é uma solução para a segurança individual, que deveria ser obrigatória e o é na maioria dos países. Mas não é

uma solução energética, pois ainda continuaria uma demanda absurda, bem na hora do banho.

A solução mais simples, além do uso da energia solar, é a do uso de aquecedores com acumulação (boilers), de pequena potência que acumulam água quente durante todo o dia para ser usada nas horas de banho, podendo inclusive serem programados para só aquecer durante a noite quando a tarifa da energia elétrica é menor. A energia consumida para o banho em uma moradia média de 4 pessoas pode ser avaliada como sendo, $W = 4 \times 0,25 h \times 5 kW = 5 kWhora/dia$, ou seja um pequeno boiler de 40 litros com uma resistência de 500W aquecendo durante 10 horas poderá fornecer essa energia, com uma demanda menor, e o que é melhor, um fator de demanda mais civilizado.

5.6.2 Efeitos Fisiológicos da Corrente Elétrica

Os circuitos elétricos devem ser tratados com grande cuidado, pois os riscos do choque elétrico estão sempre presentes. Além de sensações desagradáveis, pode ocorrer o dano físico até mesmo a morte. Em geral, apesar de associar-se o risco à diferença de potencial, é o valor da corrente o que determina o tamanho do dano biológico. Um dos exemplos deste fato está relacionado com a eletrização por atrito. Em dias frios e de baixa umidade ocorre a acumulação de carga elétrica no corpo, produzida pelo atrito com tapetes e mesmo roupas de nylon. Ao tocar um objeto metálico, como o trinco de uma porta, ocorre uma descarga elétrica cuja sensação física é desagradável. Algumas vezes são produzidas pequenas faíscas, o que demonstra a existência de potenciais de milhares de volts. Exceto pela sensação desagradável, não ocorre nenhum dano. Por outro lado, mesmo com tensões muito baixas de 30 a 50 volts, mas em condições em que a corrente elétrica atinge, no corpo, valores superiores a 50 mA pode ocorrer a fibrilação e acima de 5 A, pode levar a parada respiratória. A segurança com instalações elétricas está diretamente relacionada com a existência do fio terra, especialmente nos aparelhos nos quais exista alta tensão, como microondas, ou água como no caso dos chuveiros, máquinas de lavar e refrigeradores, **observem que todos os fabricantes fornecem estes equipamentos com fio terra!**

5.7 Questões, Exercícios e Problemas

1. Calcule a velocidade de deriva para os elétrons de um condutor de $0,1\text{ mm}$ de diâmetro feito de ouro e percorrido por uma corrente de 100 mA .
2. Neste mês a conta de luz de um apartamento foi de $R\$120,00$. Considerando o custo da eletricidade de $R\$0,30$ por $kWhora$ e a tensão da rede 220 V : a) quantos elétrons passaram pelo contador de luz? b) Discuta a sua resposta tendo em vista que os elétrons realmente não fluem como um líquido em uma tubulação.
3. Um condutor de Ni-Cr de $0,5\text{ mm}$ de diâmetro com 1 m de comprimento está ligado a uma bateria de 24 V : a) que corrente passa pelo condutor, quando ele está a $400\text{ }^\circ\text{C}$? b) Qual a potência térmica gerada pelo condutor?
4. Um estudante encontra no laboratório de eletricidade um conjunto de resistências elétricas de $100\ \Omega$, com diferentes tamanhos, de $1/8$, $1/4$, $1/2$, 1 , e 2 W . Qual a corrente máxima que o estudante deve permitir que passe em cada resistência?
5. a) Qual é a resistência de uma lâmpada de farol de automóvel, com 40 W , usada com bateria de 12 V . b) Qual deve ser a característica do fusível que protege esta lâmpada?
6. Obtenha o valor máximo da função para a potência na Eq. 5.24 e mostre graficamente que o resultado $R = r$, é um máximo da função.
7. Uma bateria de 3 V produz uma corrente de $1,99\text{ A}$ quando conectada a uma resistência de $1,5\ \Omega$. Qual é a resistência interna da bateria?
8. Um aquecedor de água é sempre constituído por uma resistência elétrica, formada por um condutor elétrico, blindado, cuja forma facilita a transmissão de calor. Supondo que um aquecedor de água deva possuir uma potência de 4000 W , como no caso dos chuveiros e funcionar em 220 V responda às questões. a) Qual deve ser a resistência do elemento calefator? b) Qual é a corrente que deve circular no mesmo? c) Considerando que o elemento calefator é feito de uma liga de Ni-Cr (tabela 5.2), qual deve ser o comprimento do condutor sabendo que foi construído por um condutor de $0,5\text{ mm}$ de diâmetro? d) Considerando que o custo da energia elétrica seja de $R\$0,30$ por $kWhora$, qual será o custo de aquecimento por minuto de funcionamento deste aquecedor?

9. Uma das funções mais utilizadas para o diodo semiconductor é a de retificador; explique o seu funcionamento utilizando a curva característica, presente na Fig. 5.13.
10. No capítulo da Lei de Gauss, aplicada à eletrostática, foi possível provar que a carga elétrica em um condutor está totalmente localizada na superfície do mesmo. Isso quer dizer que a corrente circula em um condutor sobre a sua superfície?

CAPÍTULO 6

Campo Magnético

Em 1600 William Gilbert of Colchester(1504-1603) publicou "De Magnete" o primeiro livro que identificou as forças magnéticas; consta que era médico da rainha da Inglaterra e recebeu desta a incumbência de investigar os efeitos curativos dos ímãs...

6.1 O Campo magnético

A existência de forças magnéticas entre ímãs foi observada já na Grécia antiga, na região da Magnésia, dando a origem ao termo magnetismo. A formação dos ímãs naturais, as ferritas ou óxidos magnéticos, é consequência do processo de formação da crosta terrestre, pois os minerais ao se solidificarem guardam uma *memória* do campo magnético terrestre, alguns mais do que outros dependendo da sua estrutura cristalina. Um desses casos é o da magnetita, um mineral magnético formado pelos óxidos de ferro II e III (FeO , Fe_2O_3) cuja fórmula química é Fe_3O_4 , conhecida como um dos ímãs naturais mais fortes e já utilizado por Arquimedes na Grécia antiga, (~ 200 AC). A magnetita, quando aquecida a uma temperatura superior a $550^\circ C$, adquire a estrutura da hematita (Fe_2O_3). A magnetita é a pedra-ímã mais magnética de todos os minerais da Terra, e a sua existência permitiu a fabricação de bússolas.

A introdução do uso da bússola, no ocidente, é atribuída a Marco Polo, que a trouxe da China onde parece ter sido desenvolvida durante a dinastia

Qin (200 AC). É reconhecida a sua importância para o sucesso das grandes navegações que resultaram no descobrimento da América e dos novos caminhos para o Oriente. Os fundamentos do uso da bússola e a descrição do campo magnético terrestre só apareceu no livro *De Magnete* em 1600 escrito pelo médico inglês *William Gilbert*. Nesse livro, além da exploração do carácter vetorial do campo magnético, existe a diferenciação das forças magnéticas das da eletrostática. O estudo do funcionamento da bússola permitiu mostrar que a terra possui um campo magnético semelhante ao de um ímã de barra ou seja de carácter dipolar. Também observou, Gilbert, que os polos dos ímãs são inseparáveis e que as forças entre polos podem ser atrativas entre polos diferentes (N-S) e repulsivas entre polos iguais (N-N e S-S). A designação dos polos, por norte (N) e sul (S) pode levar a uma pequena confusão no uso da bússola pois os polos geográficos norte e sul são na realidade polos sul e norte magnéticos, respectivamente. O módulo dos campos magnéticos, desde o campo terrestre até o campo do núcleo atômico, têm uma ampla variação, conforme se pode observar na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Campos magnéticos típicos.

Local magneticamente blindado	$10^{-14} T$
Na superfície terrestre	$\sim 50\mu T$
De um pequeno ímã de barra	$0,01 T$
Necessário para saturar o ferro	$2 T$
Maiores campos produzidos por correntes	CC : $40 T$ pulsadas: $800 T$
No núcleo atômico	$10^3 T$
Campo magnético numa estrela de nêutrons	$10^8 T$

A origem do campo magnético só começou a ser entendida realmente nas primeiras décadas do século XIX, especialmente depois que *Hans C. Oersted* descobriu que a corrente elétrica altera a orientação da bússola criando campos magnéticos. Esse estudo pode ser repetido utilizando-se uma bússola e um solenoide para gerar o campo magnético.

A Fig.6.1 mostra algumas das características do campo magnético produzido por um ímã de barra, analisado com pequenas bússolas colocadas em torno do ímã. Nessa figura as linha, contínuas, entrando no sul e saindo no norte, representam uma das linhas de indução magnética cuja característica principal é serem contínuas e fechadas, passando portanto por dentro do ímã.

A outra característica importante do campo magnético, é o seu módulo, e para conhecê-lo, é necessário medir a força magnética que atua sobre cargas elétricas em movimento dentro do campo magnético, por exemplo, medindo a

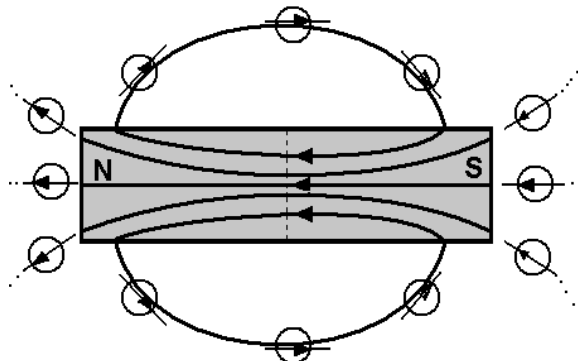


Figura 6.1: Linhas de campo magnético em torno de um ímã construídas a partir das observações da direção do campo magnético, feitas com uma bússola.

força sobre um condutor percorrido por corrente elétrica. Experimentalmente observa-se que o módulo da força magnética possui as seguintes propriedades:

- é proporcional à corrente elétrica ou valor da carga elétrica em movimento;
- atua sobre uma carga em movimento e é proporcional ao valor da carga, ao módulo da velocidade da partícula e ao ângulo entre o vetor velocidade e o campo magnético; quando v e B forem paralelos, a força é nula e quando forem perpendiculares é máxima);
- é ortogonal ao plano formado pelos vetores velocidade e campo magnético.

A observação experimental desses fatos pode ser resumida na seguinte expressão vetorial para a força magnética produzida por um campo magnético $vec{B}$, que atua sobre uma partícula de carga elétrica q que se desloca com velocidade \vec{v} :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (6.1)$$

em que $\vec{v} \times \vec{B}$ é o produto vetorial desses vetores.

A medida experimental da força magnética permite determinar o campo magnético e demonstrar que o mesmo atua somente sobre cargas em movimento. Uma consequência disso é que a interação de campos magnéticos com materiais magnéticos, como a bússola é em realidade devida à interação de um campo magnético com o movimento de cargas elétricas atômicas nos materiais.

O campo magnético é medido, preferencialmente, utilizando duas unidades, o *Tesla* (T) no SI ou o *Gauss* (G) no CGS. O Tesla é definido por:

$$T = \frac{N}{Cms^{-1}} = \frac{N}{Am} = \frac{J}{Am^2}.$$

Por ser uma unidade muito grande, em relação aos campos magnéticos usuais, como se pode observar na Tabela 6.1, o gauss é ainda muito utilizado, $1 G = 10^{-4} T$.

6.2 Cargas Elétricas em Campo Magnético

As forças capazes de movimentar cargas elétricas são uma composição de forças eletrostáticas e de forças magnéticas, cuja composição também denominada de força eletromagnética, ou **força de Lorentz** cuja expressão genérica é:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{6.2}$$

Ao contrário das forças elétricas que aceleram a partícula na direção do campo, fazendo variar a sua energia cinética, a força magnética só é responsável pela alteração da direção de movimento, sem alterar a energia cinética.

As direções relativas da força, velocidade e campo magnético são dadas pela chamada regra da mão direita, que se relacionam através da definição do produto vetorial, ou seja, a força depende da designação do sistema de referência como nos mostra a Fig. 6.2, no qual o vetor velocidade, ao girar no sentido contrário aos ponteiros do relógio, encontra o campo, definindo o chamado triedro direto ou triedro de Frenet-Serret.

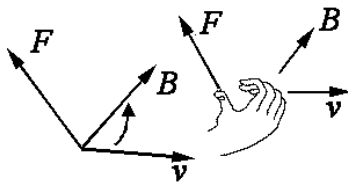


Figura 6.2: Triedro direto definindo a direção da força magnética

As cargas elétricas, sob a ação de campo elétrico, alteram a sua velocidade na direção do campo enquanto que, sob a ação do campo magnético sofrem o desvio do vetor velocidade, sem alterar o seu módulo, pois a força magnética é sempre normal ao vetor velocidade.

A aceleração de uma carga elétrica q , cujo portador possui massa m , sob ação de um campo magnético \vec{B} , pode ser escrito em termos da segunda lei de Newton:

$$\frac{F}{m} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{dv}{dt} \hat{e}_t + \frac{v^2}{r} \hat{e}_n. \tag{6.3}$$

A velocidade de uma partícula é sempre tangencial à sua trajetória e a cada ponto dessa trajetória pode-se associar um triêdro direto, com o versor tangencial na mesma direção da velocidade e o vetor normal à trajetória, na direção do centro de curvatura. O versor binormal é perpendicular ao plano formado pelos vetores tangencial e normal. Na Fig. 6.3, observam-se esses três versores.

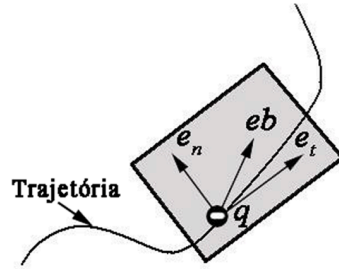


Figura 6.3: Movimento de uma carga num campo magnético, observando-se os três versores; o tangencial \hat{e}_t e normal à trajetória \hat{e}_n e o binormal \hat{e}_b .

O produto vetorial gera um vetor perpendicular ao versor tangencial, portanto

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{v^2}{r} \hat{e}_n. \end{cases} \quad (6.4)$$

Como consequência, o efeito do campo magnético é mudar a direção do vetor velocidade, conforme nos mostra a Fig. 6.4.

Quando uma carga q sofre um deslocamento $d\vec{l}$, durante um intervalo de tempo infinitesimal dt , que vale $d\vec{l} = \vec{v}dt$, o trabalho realizado pela força de Lorentz será

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}dt = q\vec{E} \cdot \vec{v}dt, \quad (6.5)$$

pois $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$.

Como consequência verifica-se que o trabalho associado à força de Lorentz deve-se somente ao campo elétrico pois o campo magnético não realiza trabalho, pois a força magnética é sempre perpendicular à velocidade da partícula. A potência ou trabalho por unidade de tempo (potência), associada à força de Lorentz depende unicamente do campo elétrico, pois

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (6.6)$$

Exemplo 6.1

Movimento de uma partícula de massa m e carga q em um campo magnético uniforme

Solução

Neste exemplo, apresentado na Fig. 6.4, o campo magnético é normal ao plano da folha e o vetor velocidade é normal ao mesmo no sentido indicado. Supondo que o sistema de referência, indicado na figura, o campo magnético possui a direção do eixo z , e o vetor velocidade terá a direção do eixo y . Da expressão do produto vetorial, 6.1, se pode deduzir que a força tomará a direção do eixo x .

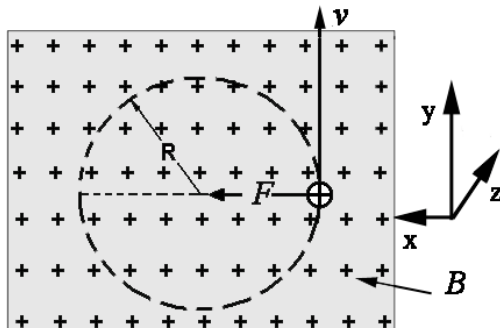


Figura 6.4: Movimento circular de um portador de carga com massa m e carga q , colocado num campo magnético normal à velocidade do mesmo.

Considerando que a força magnética, responsável pelo movimento circular, é a própria força centrípeta,

$$F_B = F_c = \frac{mv^2}{R},$$

$$R = \frac{mv}{qB \text{sen}\theta}$$

Neste caso, particular, em que $\theta = \pi/2$ e o campo B é constante, pode-se escrever o raio de curvatura como uma constante relativa ao movimento circular uniforme:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

O módulo da velocidade angular

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

é idêntico para todas as partículas com a mesma relação carga/massa. O movimento circular terá um período dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}.$$

O movimento de uma carga q colocada num campo B , uniforme e constante no tempo, sem campo elétrico no mesmo espaço, é caracterizado por uma aceleração sempre ortogonal à sua velocidade. Como o módulo da velocidade é constante, resulta que:

$$\frac{d}{dt}v^2 = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Isso mostra que a energia cinética da partícula será constante, portanto a potência devida à força magnética será sempre nula.

Exemplo 6.2

Movimento circular e helicoidal de partículas com carga elétrica em um campo magnético

Solução

Supondo o exemplo em que o campo magnético tenha a direção dada unicamente na direção x , ou seja $\vec{B} = B\hat{i}$ e o vetor velocidade inicial dado por $\vec{v}_o = v_{ox}\hat{i} + v_{oy}\hat{j} + v_{oz}\hat{k}$. O movimento na direção do campo magnético não será alterado, mantendo-se o uniforme com velocidade igual a v_{ox} . No plano yz ocorrerá um movimento circular que, composto com o movimento uniforme na direção do campo magnético, resultará em movimento helicoidal. A força magnética será dada por:

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_{ox} & v_{oy} & v_{oz} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = qv_{oz}B\hat{j} - qv_{oy}B\hat{k},$$

o que corresponde ao movimento circular no sentido contrário aos ponteiros do relógio e as equações da trajetória helicoidal podem ser escritas da seguinte forma:

$$x(t) = v_{ox}t, \\ y^2(t) + z^2(t) = r^2.$$

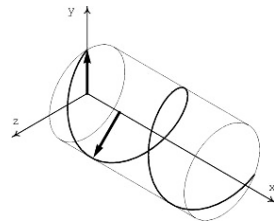


Figura 6.5: Trajetória helicoidal de partícula em campo magnético homogêneo.

6.3 Forças Magnéticas sobre os Condutores

Quando um condutor, percorrido por uma corrente, se encontra em uma região de campo magnético, os elétrons de condução sofrem a ação de forças magnéticas resultando em uma força sobre o condutor, que é a resultante das forças que atuam sobre as cargas elétricas, como se mostra na Fig. 6.6. Apesar do movimento caótico dos elétrons essa força possui um valor médio, que depende da direção do movimento de deriva, devido à corrente elétrica.

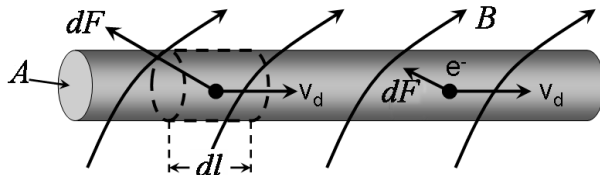


Figura 6.6: Forças magnéticas sobre um elemento de condutor dl e sobre um elétron, quando o condutor é percorrido por uma corrente elétrica.

Supondo um elemento de condutor, de volume Adl , contendo dN elétrons de condução, pode-se calcular a força magnética resultante sobre esses elétrons, contidos no elemento, considerando que eles movem-se com a velocidade de deriva \vec{v}_d , na direção da corrente convencional:

$$d\vec{F} = q(\vec{v}_d \times \vec{B})dN. \tag{6.7}$$

O número de elétrons, dN pode ser obtido, conhecendo-se ou calculando-se, como no Exemplo 5.1, a densidade de carga $n_e[C/m^3]$ do condutor,

$$dN = n_eAdl, \tag{6.8}$$

na qual A é a área transversal do condutor e dl o elemento de comprimento do elemento de condutor. A força magnética sobre o elemento será então:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= q(\vec{v}_d \times \vec{B})n_eAdl \\ &= qn_eAv_d(d\vec{l} \times \vec{B}) \\ &= I d\vec{l} \times \vec{B}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

em que, $\vec{v}_d dl = v_d d\vec{l}$ e considerando que $I = qn_eAv_d$. A força total sobre o condutor será dada por:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}, \tag{6.10}$$

No caso particular, quando o condutor for retilíneo e o campo magnético constante, formando uma ângulo qualquer, θ , com o condutor, o módulo da força, sobre o mesmo, será dada por:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}, \tag{6.11}$$

com módulo

$$F = ILB\text{sen}(\theta).$$

Exemplo 6.3

Força sobre um condutor retilíneo e circular, percorrido por uma corrente I , produzida por um campo uniforme ortogonal ao plano do condutor.

Solução

Neste exemplo aplica-se a Eq. 6.10 a um condutor semi-circular, como o mostrado na Fig. 6.7. O condutor é formado de três seções, duas retilíneas de comprimento "a" e uma central semi-circular de raio "R". O condutor está colocado no plano (yz) e o campo magnético é homogêneo e paralelo ao eixo x,

$$\vec{B} = B\hat{i}.$$

A corrente I circula na direção do eixo y, como nos mostra a Fig. 6.7 e a força sobre a parte retilínea é idêntica nas duas seções, e como o versor

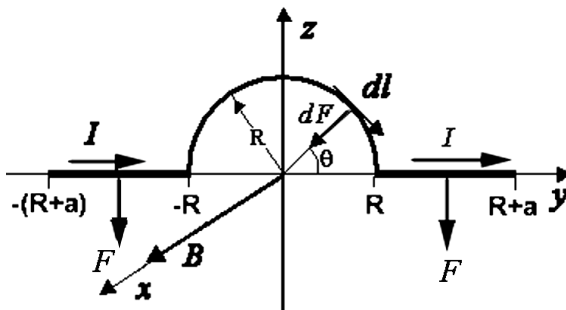


Figura 6.7: Condutor com uma seção semi-circular.

destas seções é o próprio versor do eixo y ou, ($d\vec{l} = dl\hat{j}$) resulta que a força será igual a:

$$\vec{F} = I \int_R^{R+a} (dl\hat{j}) \times (B\hat{i}) = -IaB\hat{k}.$$

Na parte circular, o vetor força é tangente a cada elemento do círculo, portanto

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B},$$

em que o versor é dado por,

$$d\vec{l} = dl \sin\theta \hat{j} - dl \cos\theta \hat{k}.$$

Como $dl = R d\theta$, pode-se escrever a força elementar como:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I[(R \sin\theta d\theta \hat{j} - R \cos\theta d\theta \hat{k}) \times (B \hat{i})] \\ &= -IRB \sin\theta d\theta \hat{k} + IRB \cos\theta d\theta \hat{j}. \end{aligned}$$

A integral desta força resultará nas duas componentes da força, portanto

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -IRB \hat{k} \int_0^\pi \sin\theta d\theta + IRB \hat{j} \int_0^\pi \cos\theta d\theta \\ \vec{F} &= -2IRB \hat{k}. \end{aligned}$$

Em virtude da simetria da parte semicircular do condutor, verifica-se que a força resultante sobre o mesmo não possui componente na direção y . O resultado, deste exemplo, também pode ser aplicado a um condutor circular compreendido por um ângulo qualquer θ , bastando alterar o limites da integral. Outro resultado interessante deste exemplo é o fato de que a força resultante sobre a parte semi-circular é idêntica à que atuaria sobre um condutor retilíneo de comprimento $2R$ colocado sobre o eixo y , o que vem a ser a projeção do semi-círculo sobre esse eixo.

6.3.1 Torque sobre espiras e bobinas

Um condutor, formando um circuito fechado, por exemplo, de forma circular ou retangular, é denominado de espira de corrente. Um conjunto de espiras idênticas é denominado de bobina.

Considerando uma espira retangular de lados a e b , como a da Fig. 6.8, percorrida por uma corrente elétrica e mergulhada em uma região de campo magnético B . Sobre os quatro lados da espira, aparecerão forças magnéticas, cujas características podem ser observadas nas duas vistas da Fig. 6.8. As quatro forças são iguais e opostas duas a duas, \vec{F}_1 se anula com \vec{F}_3 e \vec{F}_2 anula \vec{F}_4 , ou seja, a resultante de todas as forças é nula.

Como, apesar, das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_3 serem opostas e iguais não são colineares originando, como consequência, um binário que faz a espira girar em torno do seu eixo. Essas forças que formam o binário têm módulos dados por,

$$F_1 = F_3 = IBa. \quad (6.12)$$

De acordo com a Fig. 6.8, o momento do binário é dado por,

$$\tau = IBabsen\theta, \tag{6.13}$$

em que θ é o ângulo entre a normal ao plano da espira e o campo magnético. Dessa maneira pode-se escrever o momento do binário na forma vetorial,

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}, \tag{6.14}$$

em que $\vec{m} = Iab\hat{n}$ é definido como o momento magnético da espira. No caso das bobinas, formadas por N espiras de mesma área, o momento magnético será dado por:

$$\vec{m} = NIab\hat{n}. \tag{6.15}$$

A expressão do torque sobre uma espira, Eq. 6.14, em conjunto com a definição do momento magnético, nos mostra que a interação entre uma espira, percorrida por corrente, e um campo magnético é idêntica ao tratamento que se daria à interação entre um ímã de momento magnético m e um campo magnético. Esta observação nos permite analisar a verdadeira natureza dos ímãs, relacionando-a com a existência dos momentos magnéticos atômicos e nucleares.

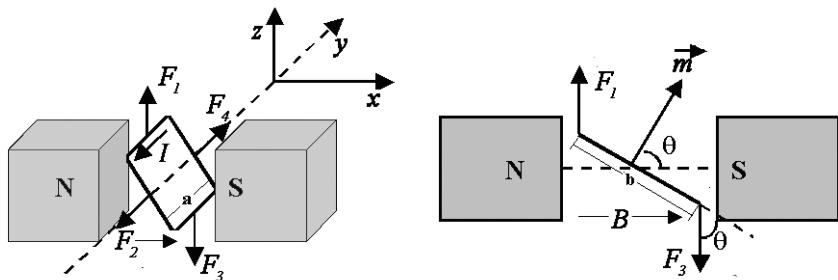


Figura 6.8: Momento angular produzido sob uma espira retangular percorrida por uma corrente colocada dentro de um campo magnético.

Momentos Magnéticos Atômicos

Considerando que os elétrons atômicos, movimentando-se em torno do núcleo atômico, também podem ser considerados como formando espiras, cuja corrente pode ser calculada por

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{2\pi r/v},$$

em que v é a velocidade orbital do elétron e r o raio médio de Bohr.

Pelo fato dessas espiras atômicas estarem sob o efeito do campo magnético, produzido pelas outras órbitas, ou mesmo pelo campo magnético nuclear, sofrerão a ação de um torque que altera a orientação dessa espira, que pode ser entendido como o efeito magnético de interação entre orbitais. O módulo do momento magnético orbital será:

$$m_o = I\pi r^2 = \frac{evr}{2}, \quad (6.16)$$

que comparada com o momento angular orbital $L = m_evr$, resulta na expressão clássica do momento magnético orbital:

$$m_o = I\pi r^2 = -\frac{e|\vec{L}|}{2m_e}. \quad (6.17)$$

As órbitas atômicas são quantizadas, em energia e em momento angular, portanto será possível aplicar, nesta mesma expressão, o momento angular obtido da física quântica. Os momentos angulares de orbitais completos são nulos, e conseqüentemente também o são os momentos magnéticos. Dessa maneira, o momento magnético será devido à soma vetorial do momento angular dos elétrons desemparelhados e dos momentos magnéticos dos seus spin. O spin, ou momento angular de giro do elétron em torno do seu próprio eixo é um conceito puramente quântico devido a um momento angular intrínseco, \vec{S} . Por semelhança com o momento angular orbital, mas sem a definição de uma corrente elétrica, pode-se definir o momento de spin como

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m}\vec{S}. \quad (6.18)$$

No caso de átomos a soma dos dois momentos pode ser calculada pela soma vetorial, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ e por analogia, com a expressão clássica do momento magnético, 6.17, resulta o momento magnético total,

$$\vec{m} = -g\frac{e}{2m}\vec{J}, \quad (6.19)$$

em que a constante de Landé g também é denominada razão giro-magnética. Como consequência desta definição de momento magnético atômico, será possível estudar as propriedades magnéticas da matéria unificando o estudo do magnetismo material com o produzido por correntes elétricas.

6.4 Aplicações Científicas e Tecnológicas

Tanto as aplicações, científicas como as tecnológicas, do movimento de partículas em campos magnéticos são muito variadas. O televisor o monitor de computador e a máquina de corte a plasma, constituem algumas

das aplicações tecnológicas já bem difundidas. Também o espectrômetro de massa, os aceleradores de partículas e o confinamento magnético de plasma constituem algumas das aplicações científicas bem conhecidas. Em todas essas aplicações utilizam-se fontes de partículas, como os canhões de elétrons, seletores de velocidade e tubos aceleradores, componentes fundamentais desses equipamentos.

6.4.1 Seletor de velocidades

Um seletor de velocidades é um dispositivo capaz de filtrar partículas de uma determinada velocidade podendo ser construído pela associação de um campo elétrico e de um campo magnético perpendiculares, como nos mostra a Fig. 6.9. Em princípio a fonte de partículas possui uma dada distribuição de velocidades como, por exemplo, os elétrons produzidos em um filamento aquecido, que possuem uma distribuição gaussiana. A condição para que partículas de uma única velocidade v sejam selecionadas é necessário utilizar um seletor de velocidades, no qual as forças elétrica e magnética se anulem, como é mostrado na Fig. 6.9, portanto

$$qvB = qE, \quad (6.20)$$

portanto a fonte deixará escapar, só partículas com velocidade

$$v = \frac{E}{B}. \quad (6.21)$$

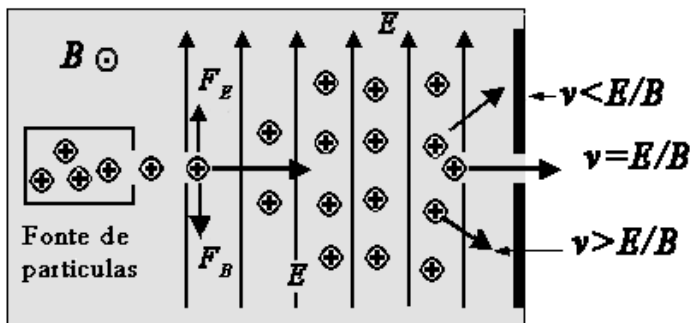


Figura 6.9: Princípio de funcionamento de um seletor de velocidade para íons positivos que possuem uma dada distribuição de velocidades, formado por um campo elétrico e um magnético.

6.4.2 Tubo de Raios Catódicos

A descoberta do elétron feita por J.J. Thomson em 1897 só foi possível graças à construção do tubo de raios catódicos, como o que está mostrado na Fig. 6.10. O resultado final deste experimento que levou à descoberta do elétron, foi a medida da relação carga-massa e/m dessa partícula.

Neste tubo os elétrons, liberados por efeito térmico, em um filamento F aquecido por uma fem ε_1 , são acelerados até à grade G pela diferença de potencial ε_2 . Estes dois componentes formam o chamado canhão de elétrons. Ao abandonar a grade, os elétrons possuem uma energia cinética média dada por

$$\frac{mv^2}{2} = e\varepsilon_2. \quad (6.22)$$

Ao entrar entre as placas paralelas, entre as quais existe uma diferença de potencial ε_3 , que estabelece um campo elétrico, as partículas são desviadas para cima ou para baixo dependendo do potencial entre as placas. A existência de um campo magnético B nesta região faz com que partículas de uma dada velocidade v sejam capazes de atingir a posição O . Aplicando uma diferença de potencial ε_3 , o feixe é desviado para a posição P . Anulando-se este efeito com o campo magnético, pode-se igualar as duas forças opostas,

$$\frac{e\varepsilon_3}{d} = evB; \quad \frac{\varepsilon_3}{d} = vB, \quad (6.23)$$

em que d é a distância entre as placas. Utilizando a equação 6.22, é possível eliminar a velocidade, obtendo-se

$$\frac{e}{m} = \frac{\varepsilon_3^2}{2d^2 B^2 \varepsilon_2}. \quad (6.24)$$

Originalmente, este experimento não utilizava, campo magnético, exigindo portanto a medida do deslocamento OP que também permite a medida da relação e/m .

O tubo de raios catódicos (CRT) é hoje utilizado em osciloscópios, aparelhos de TV e monitores nos quais a deflexão eletrostática é substituída por deflexão com campo magnético, utilizando um dispositivo conhecido por "yoke" capaz de produzir os movimentos, vertical e horizontal.

6.4.3 Efeito Hall

O efeito Hall clássico foi descoberto em 1879 por E.H. Hall e baseia-se no desvio dos portadores de carga em um condutor percorrido por corrente em função de um campo magnético, externo e normal ao condutor. Considerando uma fita condutora, como a mostrada na Fig. 6.11, em que as dimensões

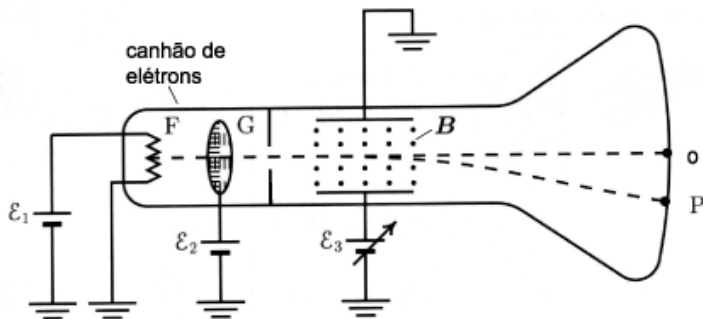


Figura 6.10: Tubo de Raios Catódicos em que F, é o filamento G, a grade aceleradora O, o centro do ecran luminoso, e ϵ_i , as fontes de tensão.

importantes são a largura da fita d e a sua espessura t , com dimensões, tais que $d \gg t$. A força eletromotriz ϵ permite fazer circular uma corrente I , dentro de um campo magnético B normal à fita. A densidade de corrente será dada por

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{i} = nq\vec{v}_d, \tag{6.25}$$

em que $A = d.t$ e \vec{v}_d é a velocidade de deriva dos portadores de carga e n , a densidade desses portadores. Se considerarmos que os portadores são elétrons, então a carga será negativa e a velocidade de deriva terá sentido contrário, não alterando portanto o cálculo de forças.

A força magnética sobre os portadores de carga será então,

$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_d \times \vec{B}) = qv_d(\hat{j} \times \hat{k}) = qv_d\hat{i}. \tag{6.26}$$

A ação da força magnética cria um acúmulo de cargas, positivas na parte superior e negativas na parte inferior da fita, criando-se um campo elétrico, vertical, que compensa a ação do campo magnético. Dessa maneira, podem-se igualar as forças elétrica e magnética que equilibram a distribuição de carga, da seguinte forma:

$$qE = qv_dB \therefore E = v_dB. \tag{6.27}$$

Considerando a existência de um campo elétrico que promove o equilíbrio das cargas, gera-se uma diferença de potencial V_H (*fem* Hall) dada por

$$V_H = Ed = v_dBd = \frac{J}{nq}Bd. \tag{6.28}$$

O valor do potencial Hall, justifica uma série de aplicações desse efeito, entre

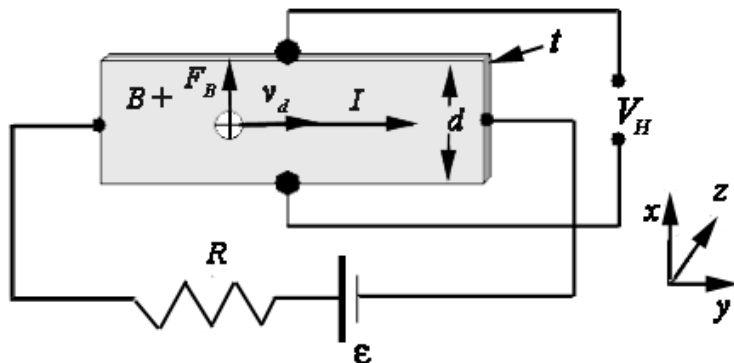


Figura 6.11: Experimento para demonstrar o efeito Hall clássico, através da medida do potencial Hall, V_H .

elas, a medida de campo magnético. O efeito Hall pode ser aplicado na construção de um sensor de campo magnético e nesse caso o condutor leva o nome de ponteira Hall. Para isso basta utilizar uma fita muito fina de condutor e um micro-voltímetro para medir uma tensão V_H proporcional ao campo magnético.

Existem outras aplicações práticas como, por exemplo, a determinação do sinal dos portadores de carga e de outros parâmetros físicos. Um desses parâmetros é o chamado coeficiente Hall, $(\frac{1}{nq})$, cuja determinação é muito importante no controle de qualidade de novos condutores e semi-condutores pois dessa maneira se determina com grande precisão a densidade de portadores de carga.

6.4.4 Espectrômetro de Massa

O espectrômetro de massa de 180° , cujo esquema pode ser observado na Fig. 6.12 é utilizado para medir com grande precisão massas atômicas. Os íons, que depois de acelerados em um campo elétrico, por uma diferença de potencial V , entram em uma região em que um campo elétrico E_s e um campo magnético B_s , associados, que selecionam partículas com uma dada velocidade v . Só partículas com essa velocidade penetram em um campo magnético B normal ao vetor velocidade, fazendo com que os íons se movam em trajetória semi-circular de raio R . O registro das massas é feito em um detector, em função do raio da trajetória, que na versão original é formado por uma placa fotográfica .

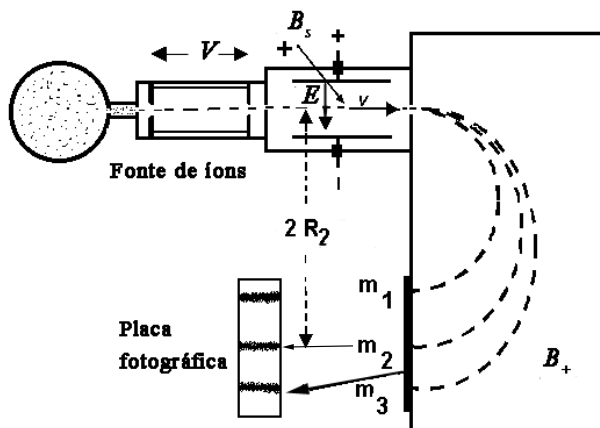


Figura 6.12: Espectrômetro de massa de 180° que consta basicamente de uma fonte de íons, um seletor de velocidades e uma câmara com campo magnético homogêneo bem como um sistema detetor de íons (placa fotográfica) para determinação do raio da trajetória circular.

Os íons, com velocidade v e massa m , em movimento circular, sofrem a ação da força centrípeta que é a força magnética,

$$\frac{mv^2}{R} = qvB. \tag{6.29}$$

Consequentemente a medida da massa é uma função do raio da trajetória,

$$m = \frac{qBR}{v}. \tag{6.30}$$

A velocidade é obtida a partir da expressão da energia cinética produzida no campo elétrico acelerador pela diferença de potencial V :

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV; \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}. \tag{6.31}$$

Introduzindo o valor da velocidade em termos do potencial acelerador, temos a expressão da massa pra um ion acelerado por uma diferença de potencial V :

$$m = \frac{qB^2R^2}{2V}. \tag{6.32}$$

A velocidade, v , dos íons deve ser mantida constante, para todos os íons de diferentes massas, mas como em geral o espectro de velocidade da fonte iônica

possui uma distribuição que depende do processo de ionização e aceleração é necessário utilizar um seletor de velocidade cujos campo magnético (B_s) e elétrico (E_s), sejam normais entre si, para selecionar, somente, íons que apesar de possuírem diferentes massas, possuem uma única velocidade v . As forças exercidas pelos dois campos terão direções opostas e definem uma dada velocidade para a qual as partículas não sofrem deflexão e penetram na região de campo magnético B com velocidade v :

$$F_{E_s} = F_{B_s} = qvB_s = qE_s \therefore v = \frac{E_s}{B_s}. \tag{6.33}$$

Substituindo esta expressão da velocidade na equação 6.30, encontra-se uma expressão que mostra que as massas dependem linearmente dos raios das trajetórias circulares de cada ion i :

$$m_i = qB \frac{B_s}{E_s} R_i. \tag{6.34}$$

Como consequência, no espectrômetro de massa, mede-se para cada valor de R_i , a massa m_i , por um traço na placa fotográfica, como se observa na Fig. 6.13.

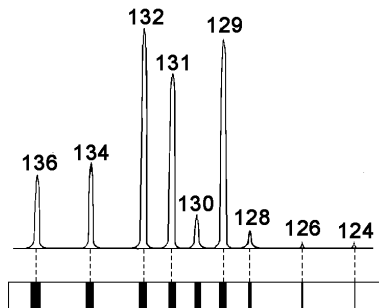


Figura 6.13: Espectro de massa dos isótopos do xenônio obtido por um espectrômetro de massa.

Como indica a Fig. 6.13 o espectro de massa nos fornece duas informações; a primeira, é o número de isótopos existentes e a sua massa em função de cada posição de R ; a segunda, e talvez a mais importante, é a abundância relativa de cada isótopo. A análise do espectro de massa torna-se importante para a definir a composição isotópica de uma amostra, de interesse, tanto na física nuclear básica como aplicada, como por exemplo na datação radioativa, ou mesmo análise química. O trabalho experimental de espectrometria de massa é baseado em dois padrões o ^{16}O e o ^{12}C , dependendo da área de interesse.

6.4.5 Confinamento Magnético

A idéia do confinamento magnético é baseado no movimento de cargas elétricas, tanto em trajetória circular como helicoidal, em campos magnéticos que restringem o movimento de partículas com a carga a essas trajetórias. Essas seriam as formas mais simples de confinamento. O confinamento mais efetivo pode ser feito utilizando a chamada garrafa magnética, uma conformação de campo magnético que pode ser obtido pela utilização de duas bobinas de corrente paralelas. Na Fig. 6.14 observa-se esse campo que na região central o campo é mais fraco e nos dois gargalos (da garrafa) o campo é mais intenso. O movimento das partículas é helicoidal mas, como a intensidade é variável, o passo da hélice também será. Como se mostra na Fig. 6.14 as partículas localizadas externamente, ao atingir o gargalo, sofrem ação de uma força que as reflete para o interior da garrafa. Esta força vai diminuindo para as partículas de hélice mais central e portanto ocorre a sua fuga pelo gargalo e o confinamento não é perfeito. Uma possibilidade de melhorar o confinamento é utilizar um campo magnético toroidal Fig. 7.30, como se faz nas máquinas que estão sendo investigadas para o confinamento de plasmas nas pesquisas sobre a fusão nuclear, os Tokamak.

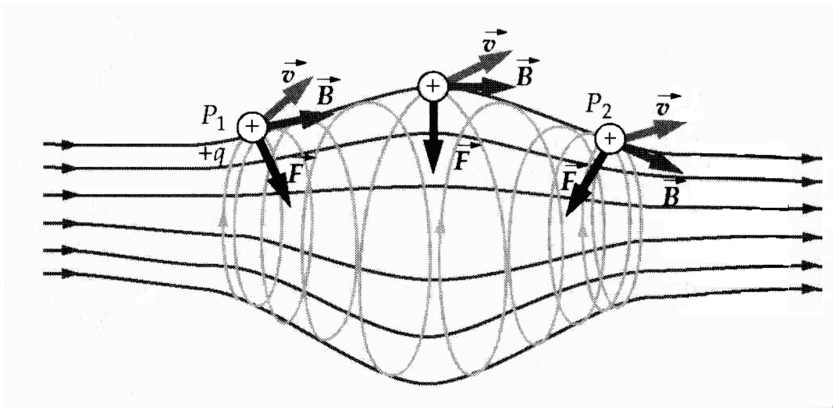


Figura 6.14: Confinamento Magnético, utilizando uma conformação de campo denominado Garrafa Magnética (com dois gargalos).

Este efeito de confinamento pode ser observado nos cinturões de *Van der Allen*, situados no campo magnético terrestre no qual, ficam confinados prótons e elétrons dos raios cósmicos. Os íons assim presos no campo magnético terrestre oscilam em movimento helicoidal, como se mostra na Fig. 6.15, atingindo uma maior densidade nos pólos, pois lá a intensidade de campo é maior, emitindo radiação eletromagnética de forma a formar-se a famosa au-

rora boreal que nada mais é do que emissão de radiação pelo plasma, nas cores rosa ou verde, conforme a altura, na latitude do círculo polar.

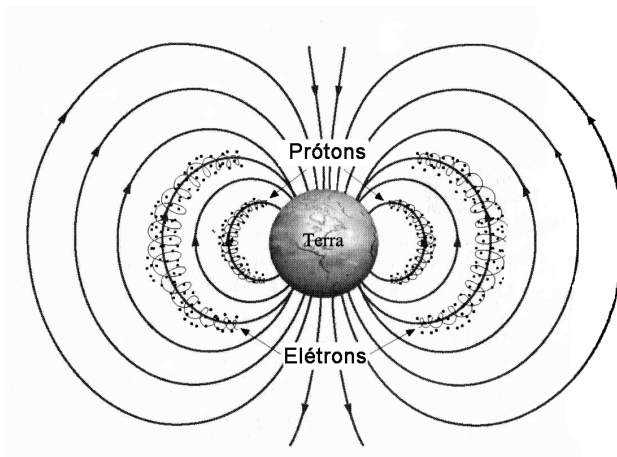


Figura 6.15: Campo magnético terrestre com cinturões de Van der Allen.

6.5 Questões, Problemas e Exercícios

1. Obtenha a expressão da força magnética que atua sobre uma carga elétrica, com carga de 10^3e que se desloca com velocidade de $\vec{v} = 10^3\hat{i} + 5 \times 10^2\hat{j} [m/s]$ em uma região com campo magnético \vec{B} : a) com a mesma direção do eixo x ; b) $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} [T]$.
2. Descreva o tipo de movimento da carga elétrica do problema 1, levando em consideração as duas possibilidades, carga positiva ou negativa. **Sugestão:** decomponha o movimento, em relação a cada um dos eixos coordenados e planos, calculando as respectivas velocidades e raios da trajetória quando for o caso.
3. Um condutor semi-circular de raio R está contido no plano yz e é percorrido por uma corrente I , sob a ação de um campo magnético, na direção positiva de z . Deduza a expressão da força que atua sobre o condutor, demonstrando que o seu módulo é idêntico à da força que atua em um condutor retilíneo de comprimento $2R$.
4. Um seletor de velocidades utiliza um campo magnético e um campo elétrico valendo, $0,05 T$ e $10^5 V/m$, respectivamente. Obtenha o valor da velocidade de um elétron e um próton que possam sair do filtro.

5. Um elétron, acelerado por uma diferença de potencial de 50 kV descreve uma órbita circular, dentro de um campo magnético semelhante ao da terra, de $60\ \mu\text{T}$. Calcule o raio da trajetória, a velocidade angular e o período do movimento.
6. A **fem** Hall é muito pequena, em geral da ordem de μV . Utilizando uma fita de cobre com largura, $d = 1\text{ cm}$ e espessura, $t = 0,01\text{ cm}$, percorrida por uma corrente de 20 A , calcule o valor do potencial Hall, V_H .
7. Um sensor de campo magnético muito utilizado é a ponteira Hall. Explique, como utilizando o efeito Hall, pode-se medir: a) o campo magnético; b) a densidade de portadores de carga em um condutor.
8. Um condutor, percorrido por uma corrente de 5 A é enrolado na forma de uma espira quadrada de lado 10 cm , é atravessado por um campo magnético uniforme, normal ao plano do espira: a) calcule o valor das forças que atuam sobre os lados do condutor; b) faça um diagrama dessas forças; c) calcule o torque que atua sobre o condutor.
9. Considere uma bobina retangular formada de 100 espiras, percorrida por uma corrente de 1 A , cujas dimensões são 5 cm e 10 cm respectivamente. Calcule o torque máximo produzido por um campo magnético uniforme de $0,5\text{ T}$, atuando sobre esta bobina.
10. Uma bússola sempre tende a oscilar em movimento harmônico amortecido, ao indicar o campo magnético: a) faça um diagrama de forças e momentos e tente explicar porque aparece essa oscilação; b) conhecendo-se o campo magnético médio no local em que se colocou a bússola, como é possível determinar o momento magnético da bússola medindo a frequência angular de oscilação da mesma?

O Campo Magnético Gerado por Corrente Elétrica

*André Marie Ampère foi professor de física, química e matemática e após a descoberta de **Hans Christian Oersted**, de que as correntes elétricas produzem campos magnéticos, elaborou a teoria que leva o seu nome...*

A existência de um campo magnético nas proximidades de um condutor de corrente foi demonstrada por Oersted em 1820. Nessa experiência ao colocar uma bússola nas proximidades de um condutor elétrico, verifica-se que as linhas de força são concêntricas ao condutor, com sentido em função da direção da corrente, como nos mostra a Fig. 7.1. Nessa experiência é muito fácil observar que a intensidade do campo magnético decresce muito rapidamente com a distância ao condutor e que a direção das linhas de campo permanecem concêntricas ao condutor para qualquer distância. Na mesma Fig. 7.1, se observa que a regra da mão direita nos mostra as direções da corrente e campo magnético, conforme se pode comprovar facilmente com a interpretação da Lei de Biot-Savart.

7.1 Lei de Biot e Savart

A representação espacial do campo magnético, gerado por uma corrente elétrica pode ser feita supondo uma lógica semelhante à lei de Coulomb, a partir da Lei de Biot e Savart. Para aplicar essa analogia é necessário dividir

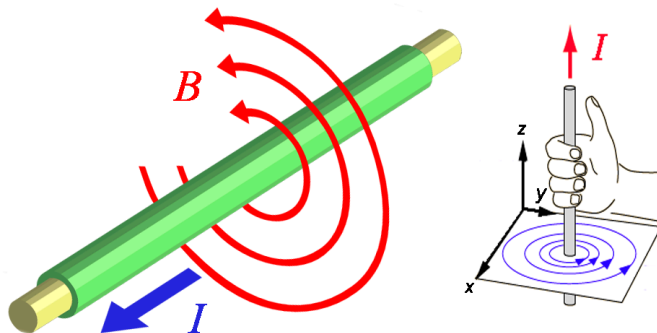


Figura 7.1: Linhas de campo magnético produzidas por um condutor retilíneo percorrido por uma corrente I .

o condutor, como o da Fig. 7.2 em um número muito grande de elementos de corrente $I d\vec{l}$, cada um deles gerando um campo elementar $d\vec{B}$.

Esse campo magnético tem o seu sentido definido pela definição utilizada para o produto vetorial, em geral o triedro direto, e por isso é denominado, *pseudo-vetor*.¹

Na Fig. 7.2, observa-se a geometria análoga à da lei de Coulomb, para aplicação da Lei de Biot e Savart onde o campo magnético $d\vec{B}$ é definido pelo elemento de vetor corrente $I d\vec{l}$.

A hipótese de que o campo magnético depende do produto $I d\vec{l} \times \hat{r}$, por analogia com a lei de Coulomb, define o campo magnético, como um vetor, ortogonal ao plano formado pelos vetores, $d\vec{l}$ e \hat{r} , da seguinte maneira:

$$d\vec{B} \propto \frac{I(d\vec{l} \times \hat{r})}{r^2}. \tag{7.1}$$

De forma experimental, pode-se confirmar a relação ou lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \hat{r})}{r^2}, \tag{7.2}$$

em que a constante de proporcionalidade $\mu_o/4\pi$, depende da permeabilidade magnética no vácuo,

$$\frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7} \frac{Tm}{A}.$$

¹O campo magnético é um pseudo-vetor pois ele só é definido pela sua direção, ficando o seu sentido dependente de uma convenção. Pseudo-vetores como o campo magnético são o torque e o momento magnético. Para a definição do sentido desses vetores, é necessário convencionar o sistema de referência adequado. No nosso caso sempre se escolhe o triedro, dito, direto e portanto a direção e sentido ficarão fixos, pois dependem do produto vetorial de dois vetores, para um sistema de referência previamente definido.

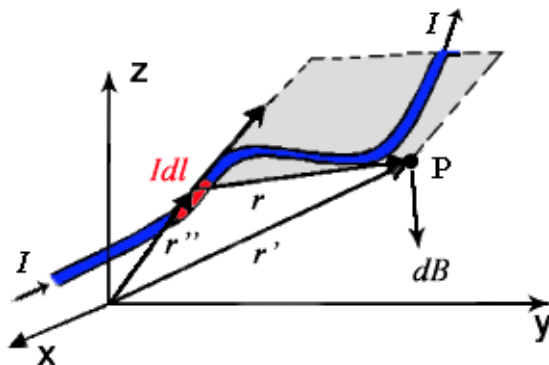


Figura 7.2: Geometria para aplicação da Lei de Biot e Savart para o cálculo de um campo magnético produzido por um condutor qualquer percorrido por uma corrente elétrica

Utilizando os vetores centrais, \vec{r}' e \vec{r}'' pode-se reescrever a lei de Biot-Savart,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}. \tag{7.3}$$

A utilização do princípio da superposição permitirá integrar as contribuições de todos os elementos de corrente. Para isso a representação do vetor posição na Fig. 7.2, deverá ser alterada utilizando o centro do sistema de referência, pois \hat{r} não representa um eixo central. Em vez disso, serão utilizados dois vetores centrais, \vec{r}'' , o vetor que localiza os elementos do circuito e \vec{r}' o vetor que localiza o ponto em que se calcula o campo magnético. Dessa maneira, a lei de Biot e Savart poderá ser escrita integrando-se as contribuições de todos os elementos de corrente que constituem o condutor

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}. \tag{7.4}$$

A lei de Biot e Savart permite obter o campo magnético para qualquer tipo de configuração de corrente, desde que conhecida a sua simetria angular. Nos dois próximos exemplos, discutem-se dois casos de utilidade prática: o campo gerado por um condutor retilíneo, infinito e o gerado por uma espira de corrente circular.

Exemplo 7.1

Campo Magnético produzido por um Condutor Retilíneo.

Solução

A definição do produto vetorial, neste caso, presente na lei de Biot-Savart Eq. 7.7, é muito simples, escolhendo-se a direção da corrente, a direção positiva de x , e o ponto P no qual se quer determinar o campo magnético na posição $(0, y)$ localizada em um círculo concêntrico com o condutor conforme mostra a Fig. 7.3.

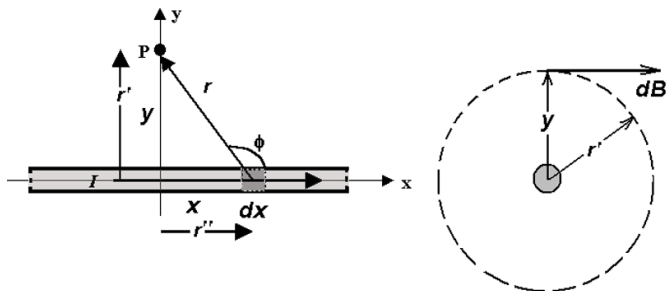


Figura 7.3: Geometria para determinação do Campo magnético em um ponto situado a uma distância y de um condutor infinito percorrido por uma corrente I .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \hat{r})}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dx \text{sen}\phi}{r^2} \hat{k}, \tag{7.5}$$

Aplicando-se o princípio da superposição, podendo-se integrar o efeito de todos os elementos de corrente que contribuem para o campo no ponto P. Para isso é necessário relacionar a simetria angular, pois tanto o ângulo ϕ como a distância $r = |\vec{r}' - \vec{r}''|$ dependem da posição x ,

$$r = \frac{Y}{\text{sen}\phi}; \quad x = -y \text{cotg}(\phi); \quad dx = y \frac{d\phi}{\text{sen}^2\phi}, \tag{7.6}$$

portanto,

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi y} \int_0^\pi \text{sen}\phi d\phi = \frac{\mu_o I}{2\pi y}. \tag{7.7}$$

Exemplo 7.2

Campo Magnético produzido por uma espira de corrente ou Dipolo Magnético.

Solução

No caso de uma espira de corrente, circular de raio a , calcula-se o valor do campo em um ponto qualquer distancia z , do centro da espira, sobre o eixo

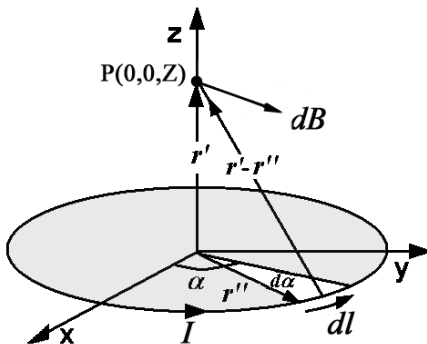


Figura 7.4: Geometria de uma espira, para o cálculo do campo magnético em um ponto qualquer do eixo da espira.

do mesmo. A geometria da espira está mostrada na Fig. 7.4. Considerando o centro da espira como o centro do sistema de referência, pode-se escrever que o vetor posição \vec{r}'' , de um elemento genérico, será

$$\vec{r}'' = a(\cos\alpha\hat{i} + \text{sen}\alpha\hat{j}) \tag{7.8}$$

e o vetor posição do ponto P será dado por

$$\vec{r}' = z\hat{k}. \tag{7.9}$$

O elemento de condutor $d\vec{l}$ será dado por

$$d\vec{l} = a d\alpha(\cos\alpha\hat{j} - \text{sen}\alpha\hat{i}), \tag{7.10}$$

enquanto que o vetor $\vec{r}' - \vec{r}''$, deslocamento do ponto P em relação ao elemento da espira, será dado por

$$\vec{r}' - \vec{r}'' = z\hat{k} - a(\cos\alpha\hat{i} + \text{sen}\alpha\hat{j}), \tag{7.11}$$

com módulo $|\vec{r}' - \vec{r}''| = \sqrt{z^2 + a^2}$.

Utilizando essas mudanças de variáveis, a Eq. 7.3 de Biot e Savart poderá ser escrita como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{a z d\alpha(\cos\alpha\hat{i} + \text{sen}\alpha\hat{j}) + a^2 d\alpha\hat{k}}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \tag{7.12}$$

A integração das componentes do vetor campo mostra que só resta uma única componente na direção z , ou seja, o campo tem estrutura dipolar, portanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_o I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}. \tag{7.13}$$

Considerando a definição do momento magnético de uma espira, como sendo $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{k}$, pode-se escrever o valor do campo, Eq. 7.13, como

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.14)$$

O limite da expressão do campo para valores $z \gg a$, leva à expressão aproximada, do campo de um dipolo magnético, produzido por uma espira de corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\vec{m}}{z^3}. \quad (7.15)$$

A expressão do campo magnético, em função do momento magnético, é de grande interesse prático para o caso em que a forma da espira seja de difícil aplicação da lei de Biot e Savart, pois pode-se recorrer à determinação experimental do momento magnético e com isso obter o valor do campo utilizando a Eq. 7.15.

Uma espira, percorrida por corrente elétrica colocada em uma região de campo magnético, B_{ext} , sofrerá a ação de um torque, como foi provado no capítulo anterior. Esse torque nada mais é do a interação entre dois campos magnéticos, o externo e o criado pela corrente, portanto

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}. \quad (7.16)$$

7.2 Lei de Ampère

O cálculo do campo magnético, gerado por um condutor retilíneo, infinito, mostra como é fácil calcular a circulação do vetor campo magnético em um círculo centrado ao condutor, como mostra a Fig. 7.5. Por circulação de um vetor, utilizando o campo magnético, define-se a integral de linha fechada,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint \frac{dl}{r} = \mu_o I, \quad (7.17)$$

pois o vetor campo é tangente à circulação considerada.

A expressão genérica da Lei de Ampère, para qualquer circulação, pode ser escrita como

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_c, \quad (7.18)$$

em que a corrente I_c é somente aquela que fura a área contida pela circulação considerada. no caso geral para o cálculo da corrente no interior da circulação, utiliza-se a densidade de corrente, \vec{j} , com a qual se pode calcular a corrente,

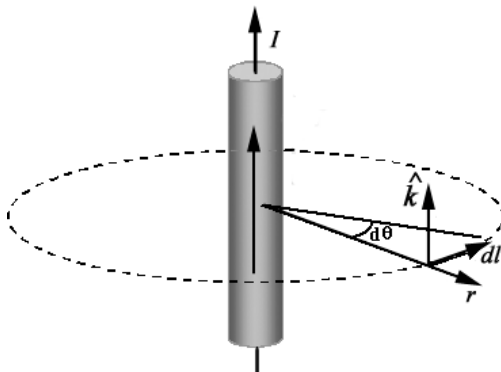


Figura 7.5: Condutor percorrido por uma corrente gerando um campo magnético.

$I_c = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$, portanto a lei de Ampère pode ser escrita em função dessa relação como

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{7.19}$$

Para exemplificar a aplicação da Lei de Ampère, vamos calcular o campo no interior e no exterior de um condutor infinito de raio externo R .

7.2.1 Campo Magnético produzido por um Condutor

Para calcular o campo magnético, no interior e no exterior de um condutor retilíneo, de raio R , considera-se que ele é percorrido por uma corrente I cuja densidade é uniforme.

Na Fig. 7.6, observa-se o campo magnético dentro e fora do condutor de raio externo R , obtido de forma experimental. Aplicando a lei de Ampère a uma circulação qualquer, de raio r no interior ou no exterior do condutor, pode-se escrever que:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_c dl = B2\pi r = \mu_o I_c. \tag{7.20}$$

Portanto, o campo será dado por:

$$B = \frac{\mu_o I_c}{2\pi r}. \tag{7.21}$$

Na realidade, esta expressão é a mesma para o exterior do condutor, utilizando a lei de Ampère, apenas agora a corrente no interior não será a total, mas sim

aquela contida no interior da circulação, de raio r , considerada,

$$I_c = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \oint dS = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}. \quad (7.22)$$

O campo no interior do condutor será então dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r. \quad (7.23)$$

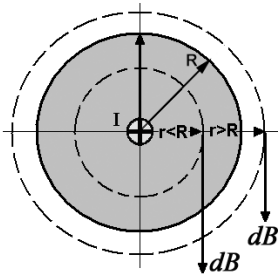


Figura 7.6: Campo magnético, gerado por um condutor percorrido por uma corrente elétrica I , dentro e fora do condutor.

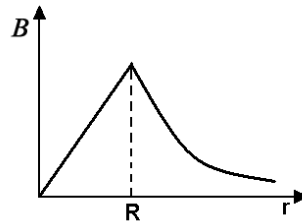


Figura 7.7: Módulo do campo Magnético, no interior e no exterior de um condutor retilíneo, percorrido por uma corrente elétrica.

Para o cálculo do campo fora do condutor, $r > R$, ao aplicar a equação 7.21, deve utilizar-se a corrente $I_c = I$, ou seja a corrente total já que, neste caso, a circulação é externa ao condutor, portanto

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (7.24)$$

Na Fig. 7.7 observa-se o comportamento gráfico das duas expressões, para o campo magnético no interior e no exterior do condutor.

7.2.2 Campo Magnético de um Solenoide

Para obter um campo magnético de maior intensidade, e ao mesmo tempo mais homogêneo, utilizam-se os solenoides. O solenóide é construído por um condutor enrolado em forma helicoidal de passo muito pequeno, em geral idêntico ao diâmetro do condutor, com várias camadas de condutor. Na

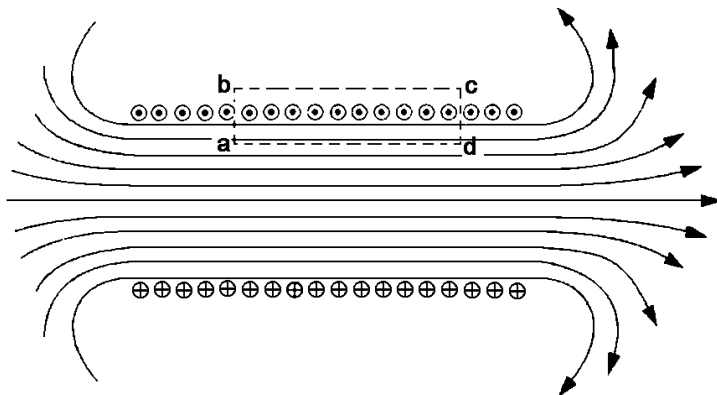


Figura 7.8: Linhas de campo magnético produzidas por um solenoide mostrando o seu caracter dipolar e concentração no seu interior.

Fig. 7.8 observa-se o campo magnético gerado no interior de um solenoide obtido pela superposição de campos magnéticos dipolares, originando um campo magnético mais intenso mas mantendo uma estrutura de campo dipolar.

Para o cálculo do campo magnético, aplica-se a lei de Ampère a uma circulação retangular contendo um pequeno número de espiras, como está indicado na mesma Fig. 7.8. A corrente que atravessa essa circulação será dada pelo número de vezes que o condutor atravessar a circulação, portanto $I_c = NI$, em que N é o número de vezes que o condutor cortar a superfície limitada pela circulação e I a corrente que circula no solenoide

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o NI. \tag{7.25}$$

Considerando que o campo no exterior ao solenoide seja nulo e homogêneo no seu interior a integral fechada, sobre a circulação, pode ser dividida para os quatro segmentos, $ab - bc - cd - da$, na seguinte forma:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} B dl \cos(\pi/2) + \int_{bc} 0 dl + \int_{cd} B dl \cos(\pi/2) + \int_{da} B dl \cos(0), \tag{7.26}$$

portanto,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{da} B dl \cos(0) = B \int_{da} dl = Bl, \tag{7.27}$$

$$Bl = \mu_o NI, \tag{7.28}$$

$$B = \mu_o nI, \tag{7.29}$$

em que $n = N/l$ é o número de espiras por unidade de comprimento do solenoide.

7.2.3 Campo em uma Bobina Toroidal

A bobina toroidal da Fig. 7.9 apresenta um campo magnético com muitas vantagens, sobre todas as outras configurações de campo, pois o campo gerado fica totalmente confinado no interior do toroide. A utilização de bobinas toroidais é muito grande, apesar da dificuldade da sua construção, por exemplo na fabricação de transformadores de grande qualidade e na fusão nuclear, nas máquinas denominadas TOKAMAK, (a palavra tokamak é um acrônimo das palavras russas *toroidal'naya kamera magnitnoi katushki*, que significam câmara toroidal e bobinas magnéticas).

Por simplicidade considera-se um torus cujas duas seções sejam circulares, envolto por N espiras percorridas por uma corrente I . Aplicando a lei

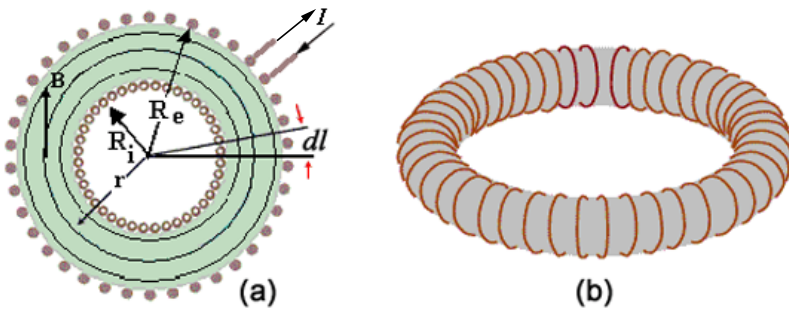


Figura 7.9: Bobina Toroidal, (a) geometria para aplicação da lei de Ampère; (b) forma toroidal com bobina.

de Ampère ao longo de uma circulação fechada,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_o I_c = \mu_o NI \tag{7.30}$$

e considerando que a corrente que atravessa a circulação $I_c = NI$. O campo magnético no interior do solenoide será dado por

$$B = \frac{\mu_o NI}{2\pi r}, \text{ para } R_i < r < R_e. \tag{7.31}$$

O campo magnético no interior do toroide não é uniforme, depende de r , por isso para aplicações nas quais isso seja importante, deve-se fazer com que o diâmetro das espiras seja muito menor do que o raio médio do toroide.

7.3 Corrente de deslocamento de Maxwell

A aplicação da lei de Ampère, tal como está apresentada neste capítulo, apresenta um problema para o caso em que a corrente é variável no tempo, tal como aquela que ocorre no intervalo de carga de um capacitor. A proposição de modificar esta lei foi feita por Maxwell em 1865, o que permitiu unificar a eletricidade e o magnetismo.

A lei de Ampère, apresentada pela Eq. 7.20, é aplicada sobre a circulação \mathbf{c} que contém a corrente que flui através da superfície limitada por essa circulação. A superfície limitada por uma circulação pode ser escolhida de várias formas, para uma mesma corrente que flui no circuito. A liberdade da escolha da superfície pode representar um problema, como no caso de um circuito contendo capacitores, como é mostrado na Fig. 7.10.

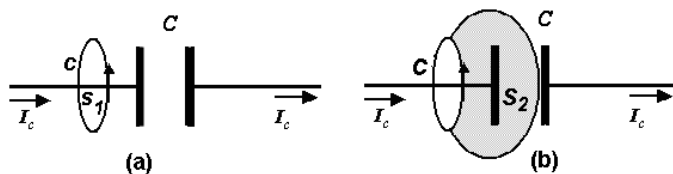


Figura 7.10: Aplicação da Lei de Ampère, a um circuito contendo um capacitor: (a) a circulação C limita a superfície S_1 ; (b) a circulação C limita a superfície S_2 .

Nessa figura, temos uma corrente que ocorre durante a carga do capacitor, e que fura a superfície S_1 , mas não a superfície S_2 . Note que a circulação sobre a qual se aplica a lei de Ampère é a mesma para as duas superfícies. A observação de Maxwell é de que, mesmo não havendo corrente atravessando a superfície S_2 , durante a carga do capacitor existe um campo elétrico variável atravessando essa mesma superfície. Utilizando a lei de Gauss para o campo elétrico, pode-se escrever que no caso, a carga elétrica q no capacitor é dada por:

$$\epsilon_0 \phi_E = q, \tag{7.32}$$

e a derivada temporal desta equação permite escrever

$$\epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt}. \tag{7.33}$$

Dessa maneira foi possível substituir na Eq. 7.18 a corrente I_c , por dois termos, utilizando o conceito da corrente de deslocamento:

$$I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}, \tag{7.34}$$

em que $\varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt}$ representa a chamada **corrente de deslocamento**, I_d :

$$I_d = \varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (7.35)$$

A corrente de deslocamento só existe quando existem correntes variáveis no tempo, circulando. Portanto, quando as placas do capacitor estiverem carregadas, essa corrente de deslocamento não existe mais e a forma generalizada da equação de Ampère será então dada por,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o(I_c + I_d) = \mu_o I_c + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (7.36)$$

Desta forma a corrente, sempre será a soma $I_c + I_d$, calculada para qualquer superfície, limitada por uma circulação à qual se aplica a integral de linha do campo magnético. A modificação da lei de Ampère por Maxwell levou à obtenção da equação 7.36, conhecida com a **lei de Ampère-Maxwell**. Nesta equação além da relação entre a corrente e o campo magnético aparece o conceito de que um campo elétrico variável no tempo, também contribui para o campo magnético. Para exemplificar considera-se $I_c = 0$, portanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (7.37)$$

Pode-se concluir que sempre que em um local se tenha um campo elétrico variável no tempo existirá um campo magnético associado. Este fenômeno, denominado indução de Maxwell, é análogo à indução de Faraday. A orientação relativa dos campos elétrico e magnético é mostrada na Fig. 7.11, na qual observa-se que, neste caso, quando o campo elétrico aumenta o campo magnético é anti-horário e quando diminui é horário.

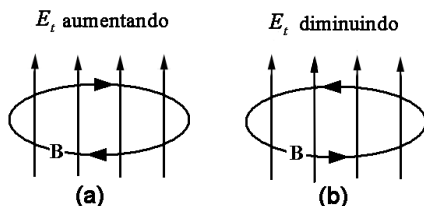


Figura 7.11: Campo magnético produzido por um campo elétrico dependente do tempo.

No caso da existência de um dielétrico entre as placas do capacitor, em vez do campo elétrico, utiliza-se o vetor deslocamento

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}, \quad (7.38)$$

em que \vec{P} é um vetor associado à polarização do dielétrico.

Quando essa polarização é variável no tempo, surge um novo termo que pode ser chamado corrente de polarização ficando portanto a lei de Ampère-Maxwell com a seguinte forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_c + \mu_o \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \\ \mu_o I_c + \mu_o \frac{d}{dt} \int_A (\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{A}. \quad (7.39)$$

Em vez do vetor deslocamento utiliza-se a sua relação com a polarização, portanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_c + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \mu_o \frac{d}{dt} \int_A \vec{P} \cdot d\vec{A}. \quad (7.40)$$

A Eq. 7.40 nos mostra que o termo devido à variação da polarização, também contribui para o campo magnético, através da chamada corrente de polarização I_p . A equação de Ampère-Maxwell pode então ter a seguinte forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o (I_c + I_p) + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (7.41)$$

7.4 Interação entre Condutores

A interação entre os campos magnéticos produzidos por condutores percorridos por corrente elétrica, pode ser exemplificada, de forma simples, para condutores paralelos de igual comprimento l . Supondo então, dois condutores paralelos e infinitos a uma distância d um do outro, percorridos por correntes I_1 e I_2 , conforme nos mostra a Fig. 7.12, pode-se considerar que o condutor 2 está colocado no interior do campo B_1 , criado pelo condutor 1 e a força que sofre o condutor 2 será então

$$\vec{F}_{21} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1. \quad (7.42)$$

O módulo dessa força, substituindo o módulo do campo magnético, será dado por

$$F_{21} = I_2 l B_1 = I_2 l \frac{\mu_o I_1}{2\pi d}. \quad (7.43)$$

Da mesma forma a força sobre o condutor 2 devida ao campo B_2 , criado pelo condutor 2 será

$$F_{12} = I_1 l B_2 = I_1 l \frac{\mu_o I_2}{2\pi d}. \quad (7.44)$$

Como consequência, a força, por unidade de comprimento, sobre o condutor 1 devida ao campo criado pelo condutor 2 é idêntica à anterior, portanto

$$\frac{F_{12}}{l} = \frac{F_{21}}{l} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}. \quad (7.45)$$

Resta agora analisar as direções relativas das correntes. Quando I_1 e I_2 , tiverem o mesmo sentido, as forças serão iguais e atrativas. Quando I_1 e I_2 tiverem sentidos opostos, as forças serão continuaram sendo iguais, mas afastando os condutores um do outro. Esta análise deverá, sempre, ser feita à luz do produto vetorial, Eq. 7.42.

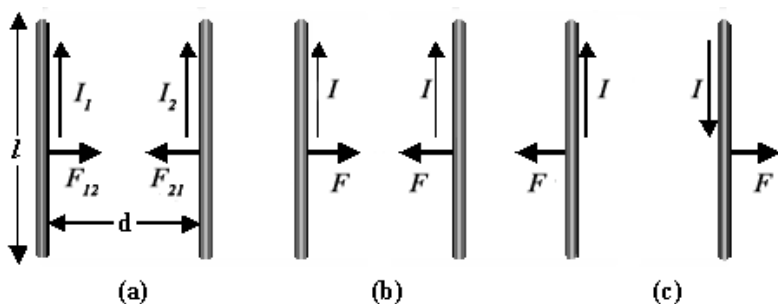


Figura 7.12: Forças de interação entre condutores paralelos percorridos por correntes: (a) diferentes no mesmo sentido; (b) iguais no mesmo sentido, (c) correntes iguais em diferentes sentidos.

7.5 Lei de Gauss para o Magnetismo

A utilização de Lei de Biot e Savart, uma forma análoga à eletrostática de tratar o magnetismo, pode levar à conclusão equivocada da existência de monopolos magnéticos. De forma simples pode se dizer, que nessa analogia não se incluiu o que se poderia chamar de carga magnética, como origem do campo magnético. A partir da verificação experimental de que as linhas de campo são contínuas, não nascendo nem sumindo em um ponto como o campo elétrico, é possível escrever que o fluxo magnético através de uma superfície gaussiana, será sempre nulo o que corresponde à lei de Gauss para o magnetismo, portanto

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (7.46)$$

Apesar da inexistência experimental dos monopolos magnéticos, criando a chamada assimetria do eletromagnetismo, Paul Dirac propôs uma categoria de monopolos que explicariam a quantização de carga, parecendo ser possível a existência na natureza de partículas possuidoras de cargas magnéticas à semelhança de cargas elétricas. No espaço em que vivemos essas partículas não possuem existência física e até hoje não foi impossível verificar experimentalmente a existência de cargas magnéticas, portanto a lei de Gauss sempre toma a forma da equação 7.46, ou seja, o fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre nulo. A analogia entre os campos do dipolo elétrico e magnético mostram uma distribuição de campo idêntica longe dos dipolos. A diferença surge nas proximidades dos polos, pois deve-se observar que as linhas de campo elétrico divergem ou convergem das cargas, dependendo do seu sinal de carga, enquanto que no caso do campo magnético as linhas de campo são sempre contínuas.

7.6 Aplicações Científicas e Tecnológicas

Um dos capítulos da eletricidade e magnetismo no qual se pode apresentar um grande número de aplicações é este, por estar relacionado com um grande número de equipamentos; entre eles, pode-se citar alguns exemplos como motores, geradores, transformadores, solenoides em comandos eletromagnéticos e relés. Escolhemos, a título de divulgação, apenas o amperímetro tipo alicate e a fusão controlada.

7.6.1 Amperímetro tipo Alicate

Existem dois tipos de amperímetro do tipo alicate, o mais simples utilizado unicamente para a medida de corrente alternada baseia-se na lei de Faraday (indução), enquanto que outros baseiam-se na lei de Ampère atuando como sensor do campo magnético entorno de um condutor percorrido por corrente elétrica. O sensor de campo magnético é baseado em dipolo magnético, da mesma maneira que uma bússola, indicando o valor da corrente proporcional ao campo magnético gerado. Neste caso o amperímetro alicate pode ser usado em CC e CA.

Em sistemas mais sofisticados, o sensor é uma ponteira Hall. Com o uso do amperímetro alicate é desnecessário interromper os circuitos para medir a corrente.



Figura 7.13: Amperímetro tipo alicate.

7.6.2 Fusão Nuclear Controlada

Um dos processos de confinamento de plasma mais promissor, para atingir a temperatura necessária à fusão de forma controlada, é o TOKAMAK, uma máquina em forma de toroide, que utiliza vários campos magnéticos gerados por corrente elétrica, capaz de confinar o plasma de hidrogênio. A fusão mais estudada até o momento é dos dois isótopos do hidrogênio, o deutério e o trítio, que misturados em proporções idênticas formam um plasma de íons positivos, que funciona como um fluido, de topologia muito complexa. A Fig. 7.14 mostra um esquema de um Tokamak baseado em um torus circular, em que o aquecimento principal do plasma é obtido por uma corrente que circula no mesmo, o aquecimento ôhmico. Na situação atual da pesquisa, a estabilidade do plasma ainda representa um grande problema. Um outro problema é a contaminação por isótopos radioativos produzidos a partir do uso da reação D-T como combustível.

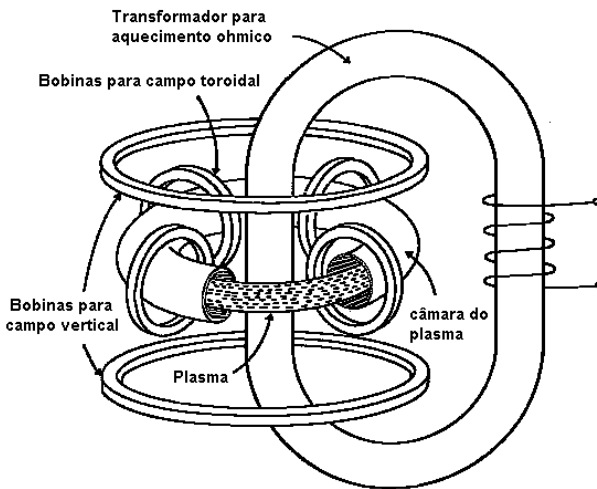


Figura 7.14: Plasma confinado por um TOKAMAK.

7.7 Questões, Problemas e Exercícios

1. Coloque uma bússola próxima a um condutor, percorrido por corrente elétrica: a) e descreva como a bússola indica a direção do campo em torno do condutor; b) e mostre como seria possível saber o valor da corrente em função da indicação da bússola?
2. Compare os sentidos das forças elétricas e magnéticas, quando duas cargas elétricas de mesma carga se movem em trajetórias paralelas: a) no mesmo sentido; b) em sentidos opostos.
3. Aplicando a lei de Biot-Savart obtenha a expressão para o valor do campo magnético e para a sua direção, no centro de uma espira circular de raio R , percorrida por uma corrente I na direção dos ponteiros do relógio.
4. Uma forma de anular o campo magnético terrestre em um dado ponto do espaço é utilizar uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica. Utilizando uma espira de 30 cm de raio, calcule a corrente que deve circular na mesma para anular o campo magnético terrestre, exatamente no centro da espira, sabendo que o campo magnético terrestre nesse ponto vale $0,58\text{ Gauss}$, ($1\text{ T} = 10^4\text{ G}$). Mostre, também, como orientar a espira, no espaço, em relação ao sentido da corrente.
5. Uma das formas mais interessantes de gerar um campo magnético homogêneo é utilizar duas bobinas circulares paralelas, percorridas por correntes idênticas e colocadas a uma distância igual ao raio das mesmas.

Esta conformação, na qual a distância entre duas bobinas paralelas é igual ao raio das mesmas, leva o nome de bobinas de Helmholtz. Supondo que duas bobinas de Helmholtz de 100 espiras e raio 40 cm , calcule o campo magnético no ponto central entre as mesmas, quando as correntes circulem na mesma direção e em direções contrárias.

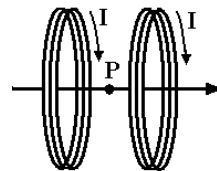


Figura 7.15: Bobinas de Helmholtz.

6. Dois condutores retos e paralelos são percorridos por correntes iguais de 20 A . Considerando que a distância entre os mesmos é de 1 cm calcule: a) o campo magnético no ponto central entre os dois condutores, para correntes na mesma direção e direções opostas; b) qual a força que atua

sobre cada um dos condutores, com correntes na mesma ou em direções opostas.

7. Um condutor feito especialmente para uma dada aplicação, utiliza um tubo de cobre de 10mm de diâmetro externo e 8mm de diâmetro interno.
 - a) Para um condutor desse tipo, retilíneo, muito longo, calcule o campo magnético, no interior e no exterior do mesmo, considerando que ele seja percorrido por uma corrente de 50 A ; b) Utilize a lei de Ampère e mostre de forma gráfica o valor da corrente no domínio $r = \{0; \infty\}$, com os valores numéricos na superfície interna e externa do tubo; c) Considerando o valor do campo magnético no interior do tubo, qual seria a utilidade deste condutor?
8. Um cabo coaxial, formado por dois condutores concêntricos, o interno formado por um condutor na forma de fio, de raio igual a $0,2\text{ mm}$ e o externo formado por uma malha de raio 3 mm , sendo as correntes nos dois condutores iguais e opostas de 5 A . Represente graficamente o campo magnético dentro e fora do cabo, indicando os valores numéricos, calculados pela lei de Ampère.
9. Um toroide de raio interno 50 cm e raio externo 100 cm , é formado por 2000 espiras percorridas por uma corrente de $0,5\text{ A}$.
 - a) Qual o campo magnético na linha central do toroide?
 - b) Qual o valor mínimo e máximo do campo no toroide?
10. Envolver o polo norte de um ímã por uma superfície fechada e justifique graficamente como se aplica a lei de Gauss para o magnetismo.

Indução Magnética

Joseph Henry e Michael Faraday, o primeiro americano e o segundo inglês descobriram, praticamente ao mesmo tempo, a indução magnética, mas ela é conhecida por Indução de Faraday por ter sido ele, o primeiro a publicar os resultados de seus experimentos.

8.1 Introdução

Um das mais belas histórias da física básica é a de Michael Faraday (1791-1867) cuja leitura se recomenda a todos os estudantes, especialmente os de Física e Engenharia, por ser um dos exemplos mais interessantes de dedicação ao trabalho e à ciência. Um bom texto pode ser encontrado na Enciclopédia Britânica, da qual ele foi encadernador. De entregador de jornais, encadernador e auxiliar de laboratório sem formação matemática Michael Faraday chegou a membro da Royal Society e publicou um impressionante número de "Pesquisas Experimentais em Física", lançando nelas praticamente todos os conhecimentos da indução magnética. O mais famoso experimento da indução produzido por Faraday foi publicado em 1831 pela Royal Society. Na primeira seção deste capítulo, descrevem-se esses experimentos que de forma qualitativa demonstram a teoria da indução.

8.1.1 Experimentos da Indução de Faraday

Os experimentos de indução de Faraday, descritos em 1831, constavam de dois solenoides próximos um ligado a uma bateria e outro ligado a um galvanômetro conforme nos mostra a Fig. 8.1. Faraday observou que, somente no instante que se ligava ou desligava a bateria ao solenoide 1, aparecia corrente no galvanômetro do solenoide 2. Mantida a chave ligada ou desligada a corrente no solenoide era nula.

Ao ligar a chave, a corrente no solenoide 1, inicialmente nula, atinge o valor I , dessa maneira se pode dizer a variação de corrente possui derivada positiva. Por outro lado, quando se desliga a mesma chave, a derivada será negativa. Observa-se, então, na Fig. 8.1 (a) e (b) que a direção da corrente induzida depende do sinal da variação temporal da corrente.

Esta mesma experiência de Faraday foi repetida utilizando-se o campo magnético produzido por um ímã, como nos mostra a Fig. 8.2, aparecendo, da mesma maneira, uma corrente induzida no solenoide e neste caso a corrente induzida é definida pela velocidade de aproximação ou de afastamento do ímã ao solenoide valendo dessa maneira as mesmas observações para a direção da corrente e do sinal da variação do fluxo magnético.

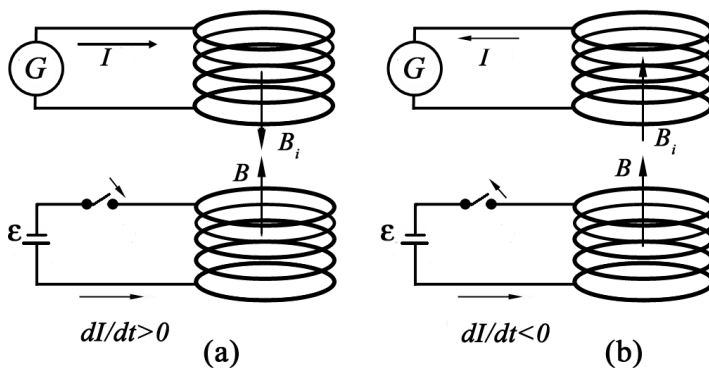


Figura 8.1: Experiências de Faraday realizada com dois solenoides, paralelos, um ligado a uma bateria (1) e outro a um galvanômetro (2): (a) quando a chave em (1) é fechada, aparece uma corrente induzida em (2) cujo sentido se opõe ao crescimento do campo na primeira; (b) quando a chave é aberta em (1) surge uma corrente induzida na bobina em (2) tentando manter o campo da primeira.

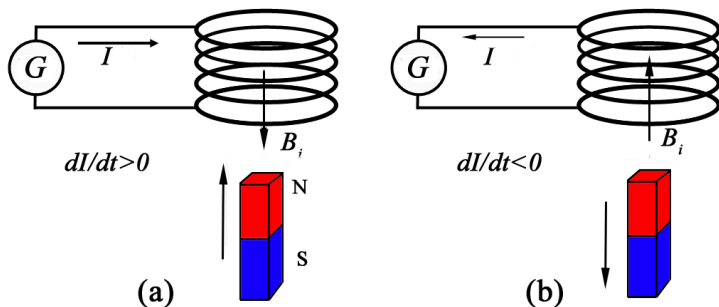


Figura 8.2: Experiências de Faraday realizadas pela movimentação de um ímã nas proximidades de um solenoide gerando uma corrente induzida na bobina; (a) aproximando o ímã, a corrente induzida tenta, anular este efeito, gerando um campo contrário; (b) afastando o ímã a corrente induzida terá uma direção, tentando manter o mesmo campo.

8.2 Lei de Indução de Faraday e Lei de Lenz

Os experimentos de indução de Faraday demonstram que para haver indução magnética é necessário um campo magnético variável que nos experimentos é produzido ou por corrente elétrica variável ou pelo movimento de ímãs. De forma análoga, movimentando uma espira em um campo magnético estático pode-se produzir o mesmo efeito produzindo a indução. Todos os fenômenos de indução magnética podem ser descritos por uma única equação conhecida como a Lei de Faraday-Lenz. Esta equação relaciona a força eletromotriz induzida com o valor da variação do fluxo magnético que atravessa o circuito.

8.2.1 Fluxo Magnético

Quando o campo magnético atravessa a área limitada por uma espira, como é mostrado na Fig. 8.3, pode-se definir o fluxo do vetor campo magnético da seguinte forma:

$$\Phi_C = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \tag{8.1}$$

A área "A" de contorno "C" é definida pelo vetor diferencial $d\vec{A} = \hat{n}dA$ onde \hat{n} é o vetor unitário da direção que define a superfície limitada pelo contorno C. O fluxo magnético poderá então ser calculado a partir do módulo do campo

e do ângulo entre a direção que define a superfície e o campo magnético:

$$\Phi_C = \int_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_A B dA \cos(\theta). \quad (8.2)$$

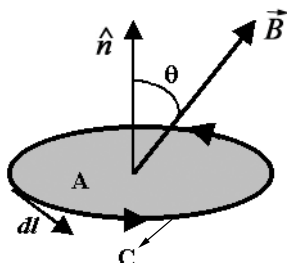


Figura 8.3: Fluxo do campo magnético através de uma espira condutora, localizada no contorno "C".

Na Fig. 8.4 mostram-se as várias possibilidades de variação do fluxo magnético no tempo; na Fig. 8.4(a) o fluxo é nulo, pois o campo também o é; na Fig. 8.4(b) o fluxo é constante e positivo, pois $\cos(\theta) > 0$; na Fig. 8.4(c) o fluxo também é positivo mas a derivada temporal do fluxo é negativa, pois o campo está decrescendo, $dB/dt < 0$; na Fig. 8.4(d) o fluxo também é positivo mas a derivada temporal do fluxo é positiva, pois o campo está crescendo, $dB/dt > 0$.

A unidade de fluxo magnético no SI é denominada *weber* (Wb), ($1Wb = Tm^2$).

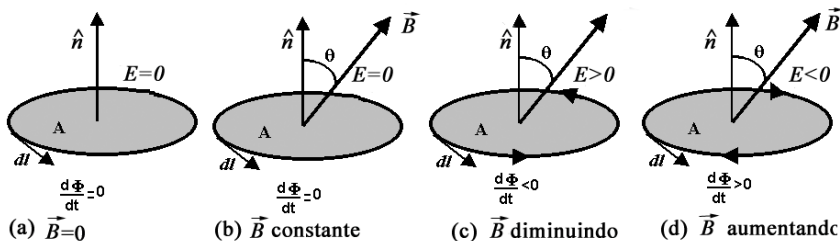


Figura 8.4: Fluxo do campo magnético através de uma espira condutora e direção da força eletromotriz induzida na espira dependendo do valor e da variação do campo magnético.

8.2.2 *Fem* induzida e a Lei de Faraday

O fluxo magnético pode variar de várias maneiras e nos exemplos apresentados na Fig. 8.4 mostra-se que a corrente induzida é gerada por um campo elétrico E induzido, cuja direção depende da variação do fluxo do campo magnético cuja derivada pode ser nula, positiva ou negativa. Por definição a *fem*, é o trabalho por unidade de carga, ao longo da espira fechada:

$$\epsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (8.3)$$

Esse campo elétrico induzido, responsável pela circulação da corrente induzida, é distribuído ao longo da espira como resultado de uma integral fechada diferente de zero ou seja, não se trata de um campo conservativo como no caso daquele gerado por cargas elétricas estáticas. Dessa forma pode-se dizer que a *fem* induzida também é distribuída ao longo do condutor sendo igual à taxa de variação do fluxo magnético que expressa a **Lei de Faraday-Lenz**

$$\epsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.4)$$

Considerando teorema de Stokes,

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A},$$

na qual $\nabla \times \vec{E}$ representa o rotacional do campo elétrico a lei de Indução de Faraday, poderá ser escrita da seguinte forma

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (8.5)$$

Considerando o caso em que a espira seja fixa e o campo magnético variável no tempo, verifica-se que:

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (8.6)$$

portanto,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.7)$$

que é a forma diferencial da lei de Faraday-Lenz, cuja generalização permite dizer que um campo magnético variável, no tempo, produz um campo elétrico, cuja propagação é independente da existência de um meio material, fato que será explorado no capítulo das equações de Maxwell.

O sinal negativo da lei de Faraday-Lenz é atribuído a *Heinrich Frederich Lenz*, que publicou em 1894 a sua lei de indução e que pode ser resumida da seguinte maneira:

”a corrente induzida em uma espira condutora terá o sentido que se opõe à variação que a criou”.

Dessa forma é possível interpretar o termo da variação do campo magnético de muitas maneiras mas de uma forma resumida poder-se-ia dizer que a variação do campo magnético, produz um aumento ou uma diminuição do fluxo magnético que atravessa uma espira e por sua vez a corrente induzida criará um campo magnético que se oporá a essa variação. Assim se o fluxo tiver a sua derivada negativa, o campo tentará manter o campo existente criando-se um campo induzido no mesmo sentido, caso a derivada for positiva o sinal negativo indicará que o campo induzido terá direção contrária, evitando que o campo cresça.

Esta interação entre o campo *indutor* e o campo *induzido* permite acrescentar uma interpretação, em termos da conservação de energia, podendo-se dizer que o trabalho necessário para produzir a indução é idêntico ao calor gerado na espira pela corrente induzida.

Considerando uma espira com resistência R , pode-se obter a corrente induzida I , na mesma, utilizando a lei de Faraday-Lenz

$$\epsilon = RI = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (8.8)$$

portanto, a corrente que circulará na espira será dada por:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (8.9)$$

Para uma espira fixa e campo magnético variável no tempo, substitui-se na equação 8.9 a definição do fluxo 8.1 resultando em:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{1}{R} \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (8.10)$$

Pode-se, então, concluir que a corrente induzida terá sempre sentido contrário à variação temporal do campo magnético, que também expressa a lei de Lenz.

Para concluir aplica-se, na sua forma genérica, a derivação do fluxo magnético:

$$-\epsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \int_A \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}, \quad (8.11)$$

na qual, o segundo termo mostra que, também, poderá ocorrer indução se ocorrer variação temporal da área atravessada pelo campo magnético. Isso

pode ocorrer tanto por rotação das espiras como por deformações físicas das mesmas. Desta maneira pode-se generalizar que a *fem* possui dois termos o primeiro depende da variação temporal do campo magnético, sem importar como isso é feito, e o segundo das deformações geométricas ou movimento do condutor no qual ocorre a indução. Algumas dessas possibilidades da realização da indução podem ser observadas na Fig. 8.5, tanto por variação temporal do campo magnético como no caso (a), (b) e (d) como por variação da área, (c) ou por rotação relativa das espiras.

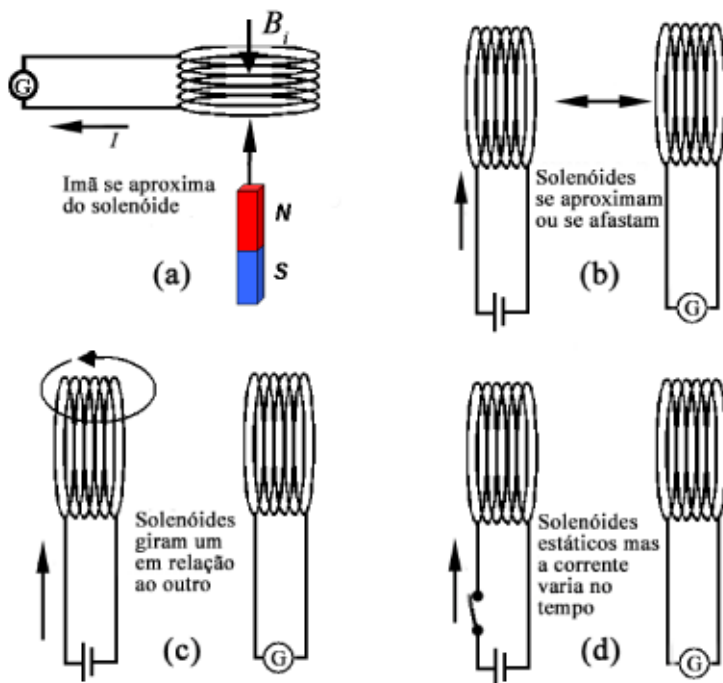


Figura 8.5: Diferentes maneiras de fazer o fluxo magnético, que atravessa uma bobina, variar, produzindo, dessa maneira, corrente induzida; (a) ímã muda de posição aproximando-se ou afastando-se de uma espira; (b) as espiras aproximam-se ou afastam-se entre si; (c) as bobinas giram mutuamente; (d) a corrente que circula na bobina da esquerda varia no tempo, pela ação de uma chave interruptora.

8.3 Estudo quantitativo da Indução

Nas experiências de indução feitas por Faraday, já descritas, a *fem* induzida ocorre pela variação do fluxo magnético. Na primeira experiência o campo indutor é uma função variável do tempo e no segundo o campo é estático em relação ao ímã, mas variável em relação á bobina. A interpretação da indução pode também ser feita em termos da força de Lorentz. A *fem* que existe em um circuito é igual ao trabalho por unidade de carga elétrica feita sob uma partícula portadora de carga. Esse trabalho é a integral ao longo do circuito da componente da força na direção do deslocamento, chamada circulação da força.

A força de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ possui uma componente devida ao campo elétrico induzido que surge pela variação do fluxo magnético mesmo sem haver movimento do condutor. A outra componente da força é devida à velocidade do condutor dentro de um campo magnético mesmo que este seja estático. No caso em que exista o movimento do condutor no interior de um campo magnético variável no tempo, ocorrerão as duas componentes da força e nesse caso a força eletromotriz será calculada pela circulação da força de Lorentz.

A observação de que, para se gerar um campo elétrico induzido, é necessário existir um campo magnético variável no tempo, permite dizer que a força eletromotriz induzida poderá ser calculada através do campo induzido, já que o campo eletrostático não gera *fem* pois, na estática a lei de Ampère análoga pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

portanto existem duas alternativas para exprimir a lei de Faraday a primeira através da equação 8.4, e a segunda que interpreta a origem da *fem* induzida,

$$\epsilon = \oint_c \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} + \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}. \quad (8.12)$$

O segundo termo da equação 8.12 mostra que em todas as experiências da Fig. 8.5, em que o solenoide ou espira estiverem parados, a contribuição deste termo para a indução dependerá unicamente do campo elétrico induzido. Nas outras experiências em que o campo indutor é estático produz-se indução por movimento da outra bobina, ocorrendo, dessa maneira, a indução devido ao segundo termo da equação, do lado direito da Eq. 8.12.

pois os vetores velocidade e campo magnético são perpendiculares entre si. A *fem* ou trabalho por unidade de carga, poderá ser calculada por,

$$\epsilon = \int_0^a vBdy = vBa. \quad (8.14)$$

De forma quantitativa, utilizando um circuito como o mostrado na Fig. 8.6, pode-se mostrar esta contribuição para a indução. O circuito é composto por um condutor em forma de U sobre o qual se desloca uma barra também condutora, fazendo com que a área da espira retangular aumente ou diminua conforme seja feito o deslocamento dessa barra. A força magnética F_B que atua sobre as cargas em movimento, no condutor móvel ser calculada por

$$|\vec{F}_q| = qvB, \quad (8.13)$$

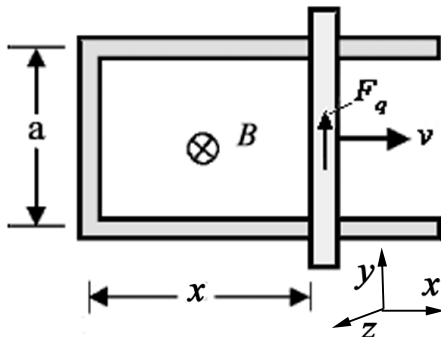


Figura 8.6: Espira condutora, retangular com braço móvel, imersa em um campo magnético B para o estudo quantitativo da indução.

Este mesmo resultado pode ser obtido utilizando diretamente a lei de Faraday, pois o fluxo magnético que atravessa a espira é dado por:

$$\Phi_B = -Bax, \quad (8.15)$$

com o campo magnético constante na direção negativa do eixo z . Derivando o fluxo e trocando o sinal obtém-se a *fem* induzida,

$$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -(-Ba\frac{dx}{dt}) = Bav. \quad (8.16)$$

Mostrando que a aplicação da Lei de Faraday é equivalente à aplicação do conceito de força magnética que resultou na Eq. 8.14 .

8.4 Auto-Indução

A lei de Faraday não explicita a fonte de campo magnético, cuja variação é a responsável pela indução. Dessa forma a indução pode ser produzida pela própria corrente que circula em um solenoide ou espira, criando auto-indução.

Esta corrente gera um campo magnético variável no tempo, gerando a indução na própria espira, pois ela está mergulhada no próprio fluxo magnético. Essa indução gera na própria bobina uma *fem* induzida, na qual a corrente induzida gera um campo magnético contrário ao efeito que o criou. Este efeito

Considerando um solenoide, como da Fig. 8.7, alimentado por uma fonte de tensão variável $V(t)$ que dá origem a uma corrente $I(t)$ induzida, função da resistência R

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}.$$

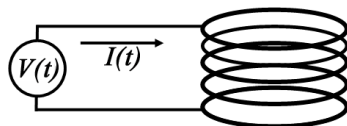


Figura 8.7: Solenoide alimentado por uma fonte de tensão que produz uma corrente $I(t)$ induzida.

é denominado **auto-indução**. O campo magnético em cada ponto do espaço, é definido pela circulação da espira e é proporcional à corrente que circula na mesma:

$$\Phi_B = LI, \tag{8.17}$$

em que a constante de proporcionalidade L é a chamada **auto-indutância**, ou simplesmente indutância ¹.

A lei de Faraday poderá então ser escrita da seguinte forma:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{8.18}$$

A lei de Ohm, pode ser reescrita, somando a tensão da fonte V e a força eletromotriz ϵ induzida:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t). \tag{8.19}$$

A potência da fonte, poderá ser obtida multiplicando a Eq. 8.19, pela corrente:

$$P = L\frac{dI}{dt}I + RI^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right) + RI^2. \tag{8.20}$$

À potência ôhmica RI^2 , responsável pelo aquecimento do condutor somou-se a potência necessária para estabelecer a *fem* induzida. O resultado é que para estabelecer um potencial variável no tempo existe a necessidade de fornecer energia que vencerá a *fem* induzida no circuito, não importando qual o valor da resistência. Integrando a potência no tempo, é possível obter a energia devida unicamente à indução:

$$\Delta U = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right)dt = \frac{LI^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2}. \tag{8.21}$$

¹A unidade de indutância no SI é o **henry** ($H = J/A^2 = Tm^2/A$)

Para o caso de corrente inicial nula, se obtém a expressão para a energia do campo magnético, no tempo t qualquer em que a corrente atinge o valor I :

$$U = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.22)$$

Exemplo 8.1

Indutância e Energia armazenada em um Solenoide.

Solução

Considerando um solenoide cilíndrico de raio médio r , comprimento l e n espiras por unidade de comprimento. Como o campo magnético gerado será $B = \mu_o n I$ o fluxo através da seção transversal do solenoide, para uma única espira, será dado por

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_o n I \pi r^2 = \mu_o n \pi r^2 I.$$

No caso de um solenoide com $N = nl$ espiras, o **fluxo concatenado** será

$$N\Phi_B = LI = nl\mu_o n \pi r^2 I = \mu_o n^2 l \pi r^2 I.$$

Portanto, comparando com a definição na Eq. 8.17, o valor da indutância será dado por

$$L = \mu_o n^2 l \pi r^2.$$

Utilizando a expressão da energia armazenada no campo magnético 8.22 e substituindo o valor da indutância e do campo magnético, resulta na energia armazenada no volume do solenoide:

$$U_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_o n^2 Al}{2} \left(\frac{B}{\mu_o n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_o} Al.$$

A densidade de energia será então,

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_o}.$$

Esta expressão foi determinada para o caso particular do solenoide, mas pode ser provada, como sendo a mesma, para qualquer outro tipo de campo magnético.

Exemplo 8.2

Indutância de um Cabo Coaxial.

Solução

Os cabos coaxiais são de grande utilidade na nossa vida diária, utilizados nas redes de computadores, nas conexões com antenas de RF, etc. A

sua utilização garante que não haja indução de campos externos mantendo a qualidade nos sinais transmitidos. A indutância e a capacitância de um cabo coaxial são parâmetros importantes para a sua escolha.

Considerando um cabo coaxial, de comprimento l e diâmetros; r_1 do condutor central e r_2 da malha condutora externa, com $r_1 \ll r_2$ percorridos por correntes iguais mas de sentidos opostos, como o da Fig. 8.8.

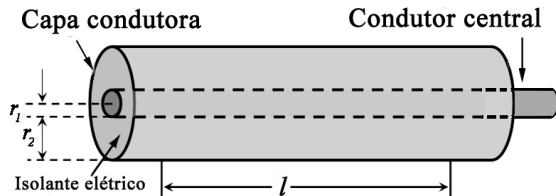


Figura 8.8: Cabo coaxial, formado por dois condutores concêntricos.

O cálculo da indutância sempre inicia com o cálculo do fluxo a partir do cálculo prévio, do campo magnético. Neste caso aplica-se a lei de Ampère a um cabo coaxial, considerando o mesmo modelo para um condutor linear infinito. O campo magnético externo será nulo já que a soma das correntes que atravessa a linha amperiana, externa é nula, (correntes iguais e contrárias), portanto só resta o campo entre os condutores;

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I; \quad \text{portanto} \quad \vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}.$$

O fluxo do campo magnético, considerando que o campo é tangencial, calculado através do retângulo de área $(r_2 - r_1)l$ será:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_A \frac{\mu_o I}{2\pi r} l dr,$$

portanto,

$$\Phi = LI = \left(\frac{\mu_o}{2\pi} l\right) l n \left(\frac{r_2}{r_1}\right) I,$$

$$L = \left(\frac{\mu_o}{2\pi} l\right) l n \left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Esta indutância não leva em consideração a existência de campo magnético no interior do condutor central, o que não gera grande erro pois, em geral, o raio desse condutor é muito pequeno. A indutância por unidade de comprimento (H/m) do cabo coaxial pode então ser definida da seguinte forma:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_o}{2\pi} l n \left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

8.5 Indução Mútua

Da mesma maneira que foi definida a auto-indutância pode-se definir a indutância mútua entre duas espiras próximas uma à outra e percorridas por correntes I_1 e I_2 como mostra a Fig. 8.9. Os fluxos magnéticos que atravessam as espiras dependerão do campo magnético de cada uma delas ou das correntes conforme a definição de indutância, presente na Eq. 8.17 e o seu cálculo será composto de duas parcelas, a relativa à auto-indução e a devida à indução mútua:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2; \\ \Phi_2 &= L_2 I_2 + M_{21} I_1,\end{aligned}\tag{8.23}$$

em que L_1 e L_2 são as auto-indutâncias e M_{12} e M_{21} as indutâncias mútuas. Derivando a equações 8.23, em relação ao tempo e trocando o sinal, obtém-se

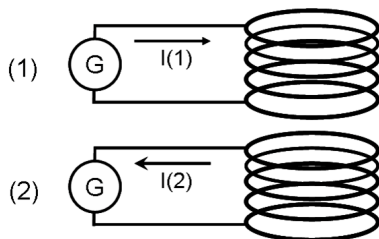


Figura 8.9: Solenoides colocados lado a lado, percorridos por correntes variáveis no tempo, produzindo indução mútua.

o valor da força eletromotriz induzida em cada uma das bobinas,

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= -\frac{d}{dt}\Phi_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}; \\ \epsilon_2 &= -\frac{d}{dt}\Phi_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt},\end{aligned}\tag{8.24}$$

portanto, as forças eletromotrizes dependem tanto da variação da corrente na própria bobina (auto-indução) como da bobina próxima (indução mútua).

Exemplo 8.3

Indutância Mútua entre dois solenoides concêntricos.

Solução

Este exemplo é de grande utilidade prática pois o auto-transformador é um dos exemplos desta geometria. Na Fig. 8.10 se observam dois solenoides

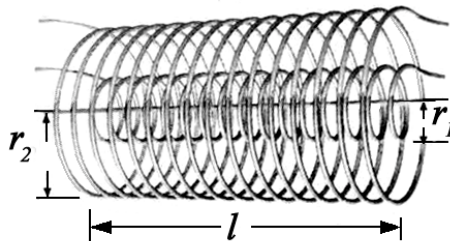


Figura 8.10: Solenoides concêntricos, o interno com N_1 espiras e o externo com N_2 , de igual comprimento l e raios r_1 e r_2 , respectivamente.

de mesmo comprimento, o interno de raio r_1 e o externo de raio r_2 . O número de espiras é N_1 e N_2 respectivamente.

O fluxo magnético em cada uma dos solenoides, considerando que o campo magnético no seu interior é constante, será

$$\Phi_1 = N_1(B_1 + B_2)\pi r_1^2 = N_1\left(\mu_o \frac{N_1}{l} I_1 + \mu_o \frac{N_2}{l} I_2\right)\pi r_1^2;$$

$$\Phi_2 = N_2(B_1\pi r_1^2 + B_2\pi r_2^2) = N_2\left(\mu_o \frac{N_1}{l} I_1\right)\pi r_1^2 + \mu_o \frac{N_2}{l} I_2\pi r_2^2).$$

Reagrupando os valores na forma da Eq. 8.23, obtém-se os fluxos concatenados:

$$\Phi_1 = \mu_o \frac{N_1^2}{l} \pi r_1^2 I_1 + \mu_o \frac{N_1 N_2}{l} \pi r_1^2 I_2;$$

$$\Phi_2 = \mu_o \frac{N_2^2}{l} \pi r_2^2 I_2 + \mu_o \frac{N_1 N_2}{l} \pi r_1^2 I_1.$$

As definições da auto-indutância e indutância mútua, permitem escrever

$$L_1 = \mu_o \frac{N_1^2}{l} \pi r_1^2; \quad M_{12} = \mu_o \frac{N_1 N_2}{l} \pi r_1^2;$$

$$L_2 = \mu_o \frac{N_2^2}{l} \pi r_2^2; \quad M_{21} = \mu_o \frac{N_1 N_2}{l} \pi r_1^2.$$

Como em geral ocorre, neste caso as indutâncias mútuas são idênticas e assim, é possível encontrar uma relação simples entre as auto-indutâncias e a indutância mútua.

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \frac{r_1}{r_2}.$$

Para dois solenoides que possuam $L_1 = L_2$ e $r_1 = r_2$, as indutâncias mútuas são idênticas,

8.6 Aplicações Científicas e Tecnológicas

As aplicações tecnológicas da indução magnética são muitas, mas apenas duas das mais importantes serão descritas pela sua importância para o desenvolvimento tecnológico do uso da eletricidade e magnetismo. Trataremos das correntes parasitas, também denominadas correntes eddy, e suas implicações práticas e dos transformadores dando apenas um tratamento introdutório já que o tema das correntes alternadas será tratado na Física 4.

8.6.1 Correntes Parasitas ou Correntes de Foucault

Quando um anel metálico é solto, em queda livre, sobre um ímã permanente, como é mostrado na Fig. 8.11(a), as correntes induzidas (correntes parasitas), que circularão no interior do anel, formam espiras de corrente, criando um campo magnético na forma dipolar que tenderá a repelir o anel com uma força em direção contrária à da queda. Essa força atuará freando a espira de forma análoga ao atrito viscoso. Da mesma maneira, se colocarmos um ímã de barra caindo dentro de um tubo condutor, vertical, como mostra a Fig.8.11(ab), o ímã também será freado. A direção das correntes induzidas é definida pela Lei de Faraday-Lenz e a existência de correntes é sempre devida a pequenos percursos dentro dos materiais, que com menor resistência elétrica forma pequenas espiras de corrente.

De forma genérica se pode dizer que sempre que o fluxo magnético for variável se induzem correntes, denominadas **correntes parasitas** em peças metálicas, como ferro, cobre, alumínio etc. Essas correntes são as responsáveis pelo aquecimento do núcleo dos transformadores, e dos rotores dos motores de indução.

A existência de correntes parasitas pode também ser demonstrada, como na Fig. 8.11, ou de uma forma mais dramática, utilizando dois pêndulos como os mostrados na Fig. 8.12. O pêndulo maciço sofrerá uma amortecimento maior do que o recortado, pois as correntes parasitas, serão de maior alcance no material.

As correntes parasitas em uma chapa metálica podem ser reduzidas se os caminhos fechados, ou condutores imaginários, tiverem as suas dimensões reduzidas, assim no pêndulo da Fig. 8.12(a) o efeito de amortecimento será muito maior do que na Fig. 8.12(b), devido à laminação. Esta mesma solução é sempre usada quando o efeito de aquecimento deve ser reduzido. Nos transformadores o núcleo de ferro é construído de lâminas muito finas e isoladas eletricamente com verniz. Por outro lado, as correntes parasitas são de grande utilidade quando utilizadas para atenuar oscilações indesejáveis, como por exemplo em balanças, velocímetros, ou especialmente para a construção de embreagens e freios eletromagnéticos e nesse caso, os discos não devem ser

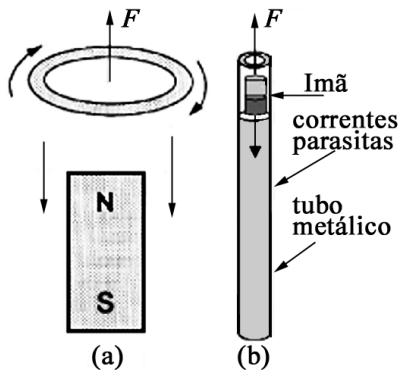


Figura 8.11: Demonstrações do amortecimento por correntes de Foucault em: (a) espira condutora (anel) caindo livremente sobre um ímã; (b) ímã caindo livremente dentro de um tubo condutor.

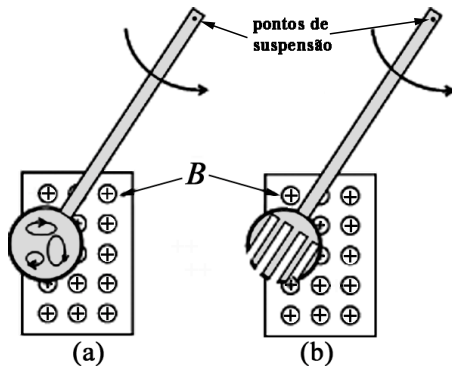


Figura 8.12: Pêndulo amortecido por correntes parasitas: disco condutor oscilando entre os polos de um ímã; (a) pêndulo maciço com maior amortecimento; (b) pêndulo laminado com menor amortecimento.

laminados. Exemplos dessa utilidade pode ser destacada nos freios de vagões de metrô e nos fornos de indução onde as correntes parasitas produzem calor capaz de fundir os metais.

8.6.2 Transformador

O transformador é, em geral, utilizado para aumentar ou diminuir a tensão com uma dissipação de energia muito pequena. Um transformador é constituído por duas bobinas sobre uma chamada de enrolamento primário e a outra de secundário, em um núcleo de ferro, que faz a concatenação das linhas de campo magnético. Ao primário é aplicada uma tensão, em geral a da rede e ao secundário é ligado um circuito (ou carga) ao qual se quer fornecer uma determinada tensão. O transformador também pode ser utilizado para isolar o circuito primário do secundário e nesse caso a tensão de entrada pode ser a mesma do circuito secundário mas as bobinas devem ser separadas como na Fig. 8.13.

O funcionamento de um transformador é esquematizado na Fig. 8.13, onde existem três componentes, dois enrolamentos de fio condutor e um núcleo de ferro laminado. O núcleo de ferro laminado, concentrando as linhas de campo magnético, faz com que o fluxo, que atravessa a seção dos enrolamen-

tos, seja o maior possível, aumentando a eficiência e diminuindo a dissipação de energia. As perdas por aquecimento do núcleo de ferro, por correntes parasitas, podem ser minimizadas utilizando um núcleo laminado, isoladas entre si, tal que as perdas, por correntes parasitas, possam ser inferiores a 5%.

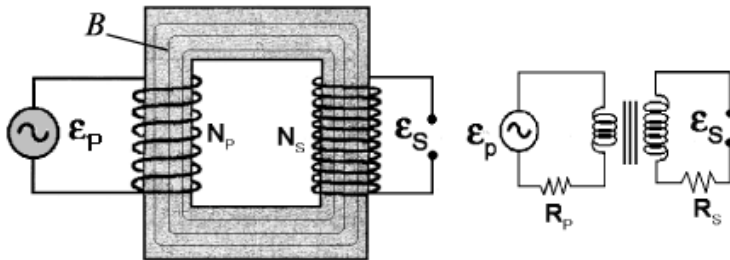


Figura 8.13: Esquema de um transformador: (a) núcleo de ferro e bobinas primária e secundária; (b) esquema elétrico equivalente a um transformador, cujo secundário está ligado a uma carga resistiva.

Considerando um transformador como o da Fig. 8.13, cuja *fem* do circuito primário é ϵ_p e a do secundário é ϵ_s , pode-se aplicar a lei das malhas ao circuito primário e secundário, utilizando o circuito equivalente, da Fig. 8.13(b), mas desprezando as perdas ôhmicas,

$$\epsilon_p = -L_p \frac{dI_p}{dt},$$

$$\epsilon_s = -M_s \frac{dI_p}{dt}.$$

Eliminando-se a derivada da corrente, pode-se relacionar as duas forças eletromotrizes e

$$\epsilon_s = \frac{M}{L} \epsilon_p.$$

Na hipótese das duas bobinas serem totalmente concatenadas pelo fluxo magnético, tanto a indutância mútua como a auto-indutância poderão obtidas a partir das seguintes equações, já deduzidas neste capítulo:

$$M = \mu_o A \frac{N_p}{l_1} N_s,$$

$$L = \mu_o A \frac{N_p^2}{l_1}.$$

Substituindo esses valores das indutâncias, na relação da *fem*, chega-se a:

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_p} = \frac{N_s}{N_p}.$$

Como a dependência temporal da *fem* em circuitos de corrente alternada se relaciona com a tensão nos circuitos primário e secundário é possível escrever que

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}.$$

Portanto, quando $N_s > N_p$, o transformador eleva a tensão e quando $N_s < N_p$, o transformador baixa a tensão.

Para relacionar as correntes, é necessário considerar a conservação de energia desconsiderando as perdas ôhmicas tanto nas bobinas como no ferro por correntes parasitas. Dessa maneira é possível dizer que a potência do circuito primário é idêntica à do secundário, portanto

$$\epsilon_p I_p = \epsilon_s I_s,$$

e a relação entre correntes será inversamente proporcional à de espiras:

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}.$$

O problema do transformador foi tratado, aqui, de forma simplificada, apenas para ilustrar a aplicação da indução, e no caso real as correntes do primário e secundário são alternadas e defasadas e o seu comportamento dependerá do tipo de carga ligada ao circuito secundário.

8.7 Questões Problemas e Exercícios

1. Um ímã de forma cilíndrica se movimenta na direção normal ao plano de uma espira condutora circular: a) faça um gráfico do fluxo magnético através da espira em função do tempo; b) mostre graficamente e justifique, a direção da corrente induzida na espira, quando o ímã está se aproximando; c) quando está se afastando do outro lado da espira; d) quando está atravessando a espira.
2. Uma espira quadrada de lado $a = 10\text{cm}$, localizada no plano xy , é atravessada por um campo magnético cujo valor é dado por $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{k}(T)$. Calcule o valor do fluxo magnético que atravessa essa espira.
3. Considerando que a espira do problema 2 gira, de forma que o fluxo tenha uma variação desde o seu valor máximo até zero em 1 s , calcule a *fem* induzida na mesma. Qual (justifique) a direção da corrente induzida na espira.
4. A espira formada pelo condutor da Fig. 8.6 de forma retangular é atravessada por um campo magnético variável no tempo cujo módulo, varia segundo a seguinte expressão: a) $B = 2 + 3t(T)$ e b) $B = 2 - 3t$. Obtenha o valor da *fem* induzida nos dois casos e justifique a direção da corrente induzida. Considere as seguintes dimensões: $a = 5\text{ cm}$ e $l = 10\text{ cm}$.
5. Considerando a mesma espira da Fig. 8.6, com as mesmas dimensões do problema 4, cujo condutor móvel se movimenta com uma velocidade de 10m/s , qual será o valor da *fem* induzida no mesmo.
6. Um solenoide muito longo, de raio $r = a$, é percorrido por uma corrente variável no tempo, gerando um campo magnético cuja expressão $B = B_0 t$. Obtenha a expressão da *fem* induzida no solenoide.
7. Um condutor retilíneo é colocado ao lado, de uma bobina quadrada e paralelo a um dos seus lados a uma distância do centro da bobina igual ao lado da mesma. a) Obtenha o valor da indutância mútua considerando a bobina com N espiras; b) Calcule o valor da indutância mútua para $a = 20\text{cm}$ e $N = 100$.
8. Dois condutores retilíneos, paralelos são percorridos por correntes iguais em sentidos opostos. Obtenha a direção da corrente induzida em um dos condutores, quando no outro se interrompe a circulação de corrente de forma brusca.
9. Deixa-se cair um pequeno ímã de forma cilíndrica dentro de um tubo vertical. Quando o tubo é de um material condutor o ímã tem o seu

movimento amortecido atingindo uma velocidade limite. Explique detalhadamente em termos de forças, porque isso ocorre.

10. Um dos problemas de utilizar núcleos de ferro maciço em transformadores, e solenoides é o aquecimento dos mesmos. Explique a origem desse aquecimento e a maneira mais simples de diminuir esse efeito.
11. Um transformador destinado a reduzir a tensão de 220 V para 120 , será utilizado para ser ligado a computador e uma impressora cuja potência total seja de 500 W , qual deve ser a relação entre o número de espiras e quais as correntes que circularam no circuito primário e secundário do mesmo.

Propriedades Magnéticas dos Materiais

Pierre Curie, em 1895, mostrou que as propriedades magnéticas de uma substância mudam a uma certa temperatura conhecida como ponto Curie e Pierre Ernst Weiss postulou a existência de um campo molecular em materiais como o ferro justificando a existência dessa temperatura crítica onde ocorre mudança de fase ...

9.1 Introdução

Depois de entender as três leis básicas da magnetostática as Leis de Ampère, Faraday e de Gauss aplicadas ao vácuo é necessário aprofundar os conhecimentos sobre as propriedades magnéticas da matéria a fim de poder aplicar essas leis quando meios materiais densos estiverem sob ação de campos magnéticos.

A matéria é constituída de partículas e tem as suas propriedades magnéticas devidas ao momento magnético delas. Em particular, os elétrons possuem momento magnético de spin além do momento magnético orbital. O núcleo atômico também possui o seu momento magnético devido aos momentos magnéticos dos prótons e nêutrons. Os momentos magnéticos intrínsecos das partículas atômicas ou nucleares são os responsáveis pelo comportamento magnético do meio material.

Colocando os materiais dentro de um campo magnético, por exemplo

dentro de um solenóide, os momentos magnéticos dos átomos ou moléculas desse material tendem a alinhar-se na direção desse campo, é o fenômeno que chamamos de **paramagnetismo**. Por outro lado, esse mesmo campo também pode produzir correntes induzidas cujo sentido é contrário ao campo externo, mostrando o chamado comportamento **diamagnético**.

Pode-se dizer que existem assim dois efeitos de carácter oposto, o alinhamento dos momentos magnéticos com o campo externo que dá o carácter atrativo na direção da fonte de campo externo e os momentos induzidos que produzem forças de carácter repulsivo. Dependendo dos momentos magnéticos intrínsecos do material, um ou outro efeito se tornará o dominante.

O agrupamento de elétrons ocupando os níveis atômicos ou moleculares faz com que nos materiais onde as camadas estão totalmente preenchidas, o momento magnético seja nulo e portanto o efeito da indução ou repulsivo será dominante. Portanto, quando nos átomos ou moléculas o spin total é nulo podemos dizer que o comportamento predominante é o do **diamagnetismo** onde os materiais são ligeiramente repelidos pelo campo externo.

A maior parte das substâncias apresenta comportamento diamagnético, como a água e os plásticos. Nos materiais, onde existe o momento magnético intrínseco, existirá além do comportamento diamagnético, em geral muito fraco, o comportamento atrativo muito fraco, ou paramagnético. Dentre estes materiais, pode-se citar o alumínio e o oxigênio.

Além desses dois comportamentos devemos destacar a forte atração que alguns materiais sofrem sob ação de campos magnéticos externos, o chamado **ferromagnetismo**. Naturalmente agora pode-se dizer que os momentos magnéticos nesses materiais devam ser muito fortes e isso se deve a que os seus átomos estão distribuídos na forma de **domínios** magnéticos. Esses domínios nada mais são que pequenas regiões da estrutura microscópica formadas por um certo número de átomos cujos momentos magnéticos possuem um alinhamento preferencial. Pode-se dizer, então, que o domínio magnético possui um momento magnético muito maior do que o dos átomos, não podendo portanto ser facilmente alterados pelas vibrações térmicas. Somente acima da **temperatura Curie** é que o alinhamento dentro dos domínios pode ser destruído. No caso do ferro, essa temperatura é de $770^{\circ}C$.

9.2 Grandezas Magnéticas e suas Unidades

A medida das grandezas magnéticas no sistema internacional de medidas (SI) é muito simples mas muitas vezes nos deparamos com valores em outros sistemas de unidades que nos causam confusão. Em primeiro lugar, vamos esclarecer as várias denominações dadas ao **campo magnético** \vec{B} , também encontrado na literatura, com a denominação de *densidade de fluxo*

magnético, ou indução magnética.

O **campo magnético externo** ou campo magnético aplicado \vec{B}_o pode ser relacionado com a densidade de fluxo através de:

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_M, \quad (9.1)$$

em que \vec{B}_M representa a **magnetização**. Através desta expressão, pode-se dizer que quando um material está sob ação de um campo magnético externo \vec{B}_o , ele adquire uma magnetização \vec{B}_M , que por sua vez modifica o campo total. No caso dos materiais diamagnéticos e paramagnéticos, o campo magnético de magnetização criado no interior dos materiais pode ser calculado através da relação

$$B_m = \chi_m B_o, \quad (9.2)$$

em que a constante χ é denominada **susceptibilidade** magnética, cujo valor é positivo para o paramagnetismo e negativa para os materiais diamagnéticos. Substituindo a equação 9.2, na 9.1, resulta,

$$B_o = \frac{B}{1 + \chi_m}. \quad (9.3)$$

Na tabela 9.1 encontram-se os valores da susceptibilidade magnética de alguns materiais de grande utilidade tecnológica.

Tabela 9.1: Susceptibilidade Magnética de alguns Materiais a 20°C

Material	χ_m
Alumínio	$2,30 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,70 \times 10^{-4}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Ouro	$-3,60 \times 10^{-5}$
Prata	$-2,60 \times 10^{-5}$
Titânio	$7,06 \times 10^{-5}$
Nitrogênio	$-5,00 \times 10^{-9}$
Oxigênio	$-2,09 \times 10^{-6}$

Para a determinação da susceptibilidade de um dado material utiliza-se, por exemplo, um campo magnético B_o externo é produzido pela corrente, I_o que circula em um solenóide no qual se introduz o material, como núcleo, como é mostrado na Fig. 9.1.

Aplicando a lei de Ampère, da mesma maneira como foi feito para um solenoide com vácuo,

$$\oint_C \vec{B}_o \cdot d\vec{r} = \mu_o I_o, \quad (9.4)$$

e utilizando a Eq. 9.3 pode-se reescrever a equação de Ampère 9.4 da seguinte forma

$$\oint_C \frac{\vec{B} d\vec{r}}{1 + \chi_m} = \mu_o I_o, \quad (9.5)$$

a partir da qual pode-se definir a permeabilidade magnética do material na forma;

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m). \quad (9.6)$$

Portanto, a lei de Ampère aplicada a um meio material de permeabilidade magnética μ , terá a seguinte forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I_o. \quad (9.7)$$

Em vez do vetor indução magnética, utiliza-se, muitas vezes, o vetor **campo magnético** H e como consequência pode-se reescrever a lei de Ampère de uma forma mais simples,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_o. \quad (9.8)$$

Podendo, então, definir-se o campo magnético como sendo

$$H = \frac{B}{\mu}.$$

No sistema SI, o valor de \vec{B} é dado em **Tesla**, mas também pode-se encontrar medidas em **Gauss**. A medida de campo magnético é comumente feita por um gaussímetro, o ideal seria chama-lo de teslâmetro, pois gauss é uma unidade do sistema CGS. A relação entre as duas é $1G = 10^{-4}T$. No SI \vec{H} é medido em A/m, mas também se encontra em oersted (Oe) no CGS, $1 Oe = 1000/4\pi A/m$. A magnetização por sua vez no SI, também é dada em A/m e no sistema CGS em emu/cm³ (magnetização por unidade de volume).

9.3 Caracterização de Materiais Magnéticos

Como a magnetização é dependente da temperatura e do campo magnético externo, pode-se dizer que a caracterização de um material magnético depende da medida experimental de duas funções fundamentais: $B_M(B_o)$ e de $B_M(T)$, ou seja a magnetização em função da temperatura e em função do campo magnético aplicado. A magnetização de um material é feita introduzindo-se uma amostra desse material no interior de um solenoide ou um toroide no qual circula uma corrente, capaz de criar um campo magnético externo, como nos mostra a Fig. 9.1.

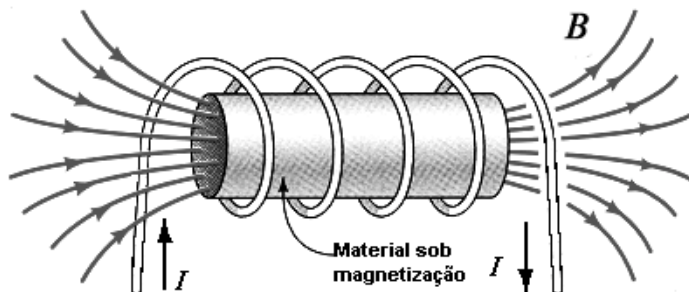


Figura 9.1: Magnetização de um material utilizando o campo magnético externo, produzido por um solenoide percorrido por uma corrente elétrica I .

Cada material possui algum tipo de comportamento magnético típico mas em geral nos referimos ao magnetismo como à propriedade de atração magnética dos ímãs permanentes. Este tipo particular de magnetismo, o ferromagnetismo, não é o único tipo de comportamento magnético, pois estudando essas duas funções de magnetização poderemos classificar outros tipos de materiais magnéticos. As propriedades magnéticas dos materiais, excluindo o diamagnetismo que ocorre em todos os materiais, são decorrentes das interações de elétrons desemparelhados. Essas propriedades, presentes em materiais com os metais de transição, lantanídeos e seu compostos são devidas aos elétrons d e f desemparelhados. De uma forma geral é usual classificar os materiais em três classes principais: paramagnéticos, nos quais os momentos magnéticos dos elétrons desemparelhados encontram-se orientados aleatoriamente; ferromagnéticos, nos quais os momentos magnéticos dos elétrons desemparelhados estão todos alinhados; antiferromagnéticos, nos quais os momentos magnéticos se alinham de forma oposta. Além destas três classes ainda é possível classificar como ferrimagnéticos, quando os spins estão alinhados de forma oposta, mas como o número de spin em uma direção é diferente da outra, resultando em um momento magnético. Na Fig. 9.2, pode-se observar o efeito de campo magnético externo sobre os dipolos magnéticos dos materiais considerados. Diversos outros comportamentos magnéticos da matéria tem sido explorados entre eles podemos citar: Spin-Glass (vidros de spin), Cluster-Glass e super-ímãs formados de partículas magnéticas muito pequenas, que atuam como um paramagneto gigante.

A susceptibilidade magnética total de um material é resultante da importância relativa do seu comportamento diamagnético e paramagnético ou ferromagnético. A susceptibilidade magnética varia de 10^{-5} em materiais

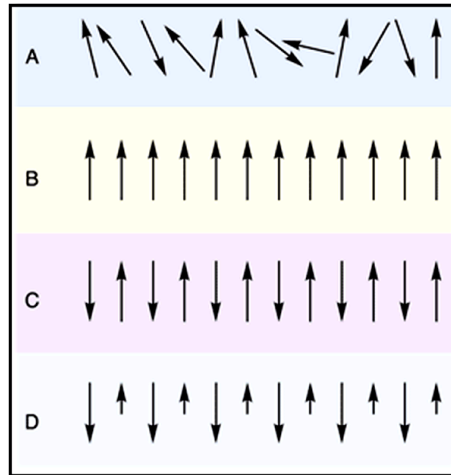


Figura 9.2: Tipos de Materiais Magnéticos: (A) paramagnéticos; (B) ferromagnéticos; (C) antiferromagnéticos; (D) ferrimagnéticos; adaptado de: <http://www.sigmaaldrich.com/materials-science/alternative-energy-materials/magnetic-materials/tutorial/properties.html>

fracamente magnéticos até 10^6 em materiais fortemente magnéticos. Dependendo da origem microscópica da magnetização, os materiais são classificados como:

- diamagnéticos, são sempre, fracamente repelidos por campos externos muito intensos, característica de quase todos os materiais existentes na natureza, como água, plantas, madeira, solo, pele etc. Uma das consequências mais importantes desta propriedade é o seu uso na geração de imagens por ressonância magnética ou MRI;
- paramagnéticos, são alguns metais, como o alumínio, ouro, e cobre, fracamente atraídos por campo externo intenso;
- ferromagnéticos, materiais fortemente atraídos por campo magnético, incluem o níquel, cobalto e o aço;
- antiferromagnetismo;
- Ferrimagnetismo, o material mais conhecido é a magnetita, presente em muitas rochas e nas chamadas ferrites.

Na tabela 9.1, observa-se que existem substâncias com susceptibilidade magnética positiva e negativa que corresponde, respectivamente, às paramagnéticas e diamagnéticas. Como regra geral, a susceptibilidade magnética das substâncias paramagnéticas é maior do que a das diamagnéticas. Uma outra informação importante é que a susceptibilidade dos materiais diamagnéticos é independente da temperatura enquanto que para os paramagnéticos depende fortemente da temperatura cuja dependência foi estabelecida por Pierre Curie em 1895, "*a susceptibilidade paramagnética diminui inversamente proporcional à temperatura absoluta*".

9.3.1 Origem atômica do Magnetismo

A magnetização da matéria tem origem no momento magnético associado ao momento magnético do elétron, mas o núcleo atômico, também possui momento magnético. O magnetismo atômico é devido tanto ao momento magnético orbital \vec{L} como ao momento angular de spin \vec{S} . O momento magnético, devido ao momento angular dos elétrons, pode ser entendido de forma clássica, na Fig. 9.3, pode-se observar a analogia entre os momentos magnéticos produzidos por corrente elétrica em uma espira e o momento magnético orbital e de spin.

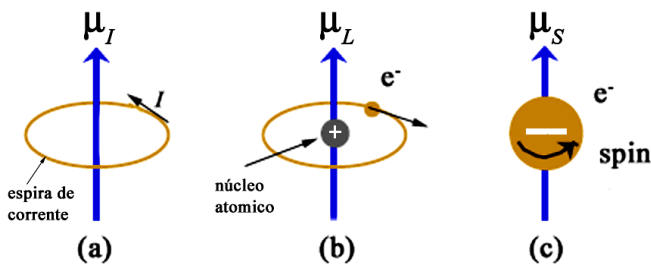


Figura 9.3: Momentos magnéticos gerados por: (a) corrente elétrica em uma espira; (b) elétron girando em sua órbita; (c) spin do elétron.

O elétron girando entorn do núcleo gera uma corrente I ,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e\omega}{2\pi}$$

, que por sua vez gera um momento magnético

$$\mu = IA = i\pi r^2 = \frac{-e\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{-e\omega r^2}{2}, \tag{9.9}$$

em que ω é a velocidade angular do elétron e r o raio médio orbital. Considerando que o momento angular orbital seja dado por $|\vec{L}| = mvr = m\omega r^2$ pode-se escrever, de forma vetorial, o momento magnético orbital:

$$\vec{\mu}_L = \frac{-e}{2m} \vec{L}. \quad (9.10)$$

A constante de proporcionalidade entre o momento magnético e o momento angular é a denominada razão giromagnética clássica, $\gamma = \frac{e}{2m}$. Em virtude do sinal da carga do elétron, o vetor momento magnético tem direção contrária à do momento angular. A soma dos momentos angular orbitais, \vec{J} , permite obter o momento magnético atômico total, como:

$$\vec{\mu}_a = -g \frac{e}{2m_e} \vec{J} = -g_L \frac{e}{2m_e} \vec{J} + -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S}, \quad (9.11)$$

em que g é um número positivo conhecido como fator de Landé. Para o momento angular, $g_L = 1$ enquanto que para o spin, por ser uma propriedade intrínseca, que não possui análogo mecânico o valor da razão giromagnética vale $g_s \simeq 2$. Os momentos magnéticos atômicos são sempre a soma dos momentos magnéticos angulares, orbitais e de spin:

$$\vec{\mu}_{LS} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_L. \quad (9.12)$$

Na Fig. 9.3 não foi representado o momento magnético devido ao núcleo atômico pois, apesar da sua importância na física nuclear, seu valor é insignificante e não influencia as propriedades magnéticas dos materiais. O momento magnético atômico, considerando a contribuição nuclear deveria ser escrita como:

$$\vec{\mu}_{LS} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_{np}, \quad (9.13)$$

na qual μ_{np} , representa o somatório dos momentos magnéticos dos nêutrons e prótons nucleares.

9.3.2 Diamagnetismo

Quando a função de magnetização B_M , em relação ao campo externo, é linear e reversível, mas possui uma inclinação negativa, a susceptibilidade terá valor negativo, ocorre o chamado diamagnetismo. Na maioria dos casos, esse comportamento resulta da contribuição de elétrons emparelhados, ou seja, quando o momento magnético é nulo. Na Fig. 9.4, se observa o chamado efeito Meissner, ou comportamento diamagnético dos supercondutores do tipo I no qual as linhas de campo magnético se afastam do condutor. Quando um supercondutor é submetido a um campo magnético, a corrente induzida anula o campo magnético no interior do material.

Em 1908, o holandês Heike Kamerlingh Onnes descobriu que para uma temperatura diferente do zero absoluto, a resistividade elétrica de alguns materiais era nula. A essa temperatura crítica T_c , esses materiais como o mercúrio, atingem o estado superconductor. Isto se tornou ainda mais evidente após a descoberta em 1933, por Meissner e Ochsenfeld, de outra importante propriedade de um material no estado superconductor: o diamagnetismo perfeito. Eles descobriram que um campo magnético externo aplicado em um material no estado superconductor é expulso de seu interior. Essa propriedade passou a ser chamada de Efeito Meissner como mostra a Fig. 9.4. Nessa figura mostra-se a corrente induzida que gera um campo contrário ao externo.

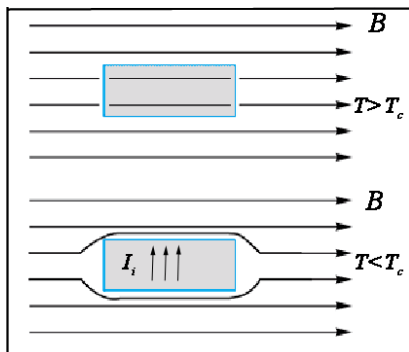


Figura 9.4: Superconductor do tipo I mostrando o seu comportamento diamagnético dentro de um campo magnético externo quando ele se encontra abaixo da temperatura crítica, T_c .

Substâncias como os diamantes, que são substâncias diamagnéticas, são repelidas pelo campo magnético ao contrário das substâncias como o alumínio, paramagnéticas, que são atraídas. Tanto a atração das paramagnéticas como a repulsão das diamagnéticas é de intensidade muito pequena, dependendo da sua susceptibilidade, e quase imperceptível se comparada com a atração das substâncias ferromagnéticas. Através dos experimentos de magnetização pode-se concluir, então, que as substâncias diamagnéticas repelem as linhas de campo ou seja no interior de uma amostra, diamagnética $B < B_o$ enquanto que as paramagnéticas, atraem as linhas de campo magnético portanto, $B > B_o$.

Teoria do Diamagnetismo de Larmor

Nas substâncias cujos átomos não possuem momentos magnéticos dipolares permanentes, por emparelhamento dos momentos angulares orbitais e de spin, a indução de momentos magnéticos é a responsável pelas suas propriedades magnéticas. Nestas substâncias, apesar de possuírem momentos magnéticos, intrínsecos, nulos, quando sob a ação de um campo externo cujo fluxo varia no tempo, ocorre a indução de dipolos magnéticos.

De acordo com a Lei de Lenz, o sentido dos momentos magnéticos induzidos é oposto ao do campo magnético externo portanto, de um modo geral,

pode se dizer que o diamagnetismo está sempre presente, quando se aplicam campos magnéticos externos variáveis tenha o material ou não momentos magnéticos permanentes. Embora os átomos tenham momentos magnéticos, também se induzem correntes circulares, que geram esse comportamento diamagnético, mas em geral, nesse caso, o comportamento diamagnético é ofuscado pelo paramagnético.

O diamagnetismo, associado a correntes circulares, costuma ser chamado de **diamagnetismo de Larmor** e pode ser observado facilmente para átomos com orbitais com dois elétrons. O modelo clássico do átomo diamagnético parte da idéia de um elétron com dois elétrons na última camada que possui momento magnético total nulo, conforme se pode observar na Fig. 9.5:

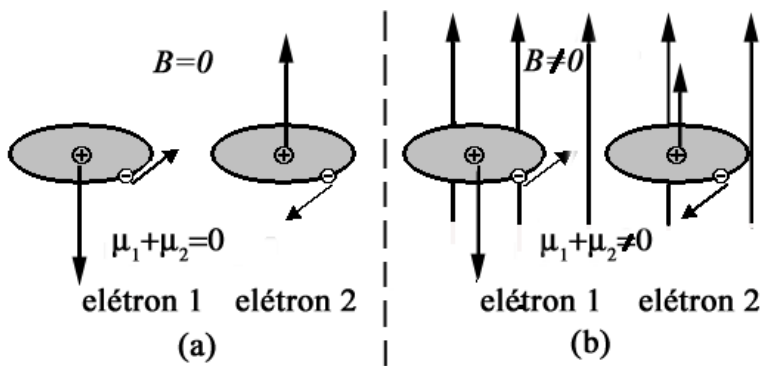


Figura 9.5: Efeito diamagnético, em átomos com dois elétrons, mostrando o momento magnético atômico: (a) Sem campo magnético externo; (b) com campo externo.

Colocando um átomo de dois elétrons dentro de um campo magnético externo, pode-se calcular a susceptibilidade escrevendo a força resultante sobre cada um dos elétrons e igualando-a à força centrípeta. Considerando um campo magnético, externo, de pequena intensidade, B_o , a variação da força sobre do elétron "1" conforme a Fig. 9.5, resulta em

$$-\frac{m_e v^2}{R} = -\frac{m_e v_o^2}{R} - evB_o. \tag{9.14}$$

Para o elétron "2" a força será

$$-\frac{m_e v^2}{R} = -\frac{m_e v_o^2}{R} + evB_o. \tag{9.15}$$

As equações 9.14 e 9.15 podem ser escritas em função da frequência de rotação,

$\omega = v/R$, com e sem campo externo,

$$-\frac{v^2}{R^2} = -\frac{v_o^2}{R^2} - \frac{v}{R} \frac{eB_o}{m_e}, \quad (9.16)$$

$$-\frac{v^2}{R^2} = -\frac{v_o^2}{R^2} + \frac{v}{R} \frac{eB_o}{m_e}. \quad (9.17)$$

Considerando nas duas equações, a definição da frequência de Larmor,

$$\omega_L = \frac{eB_o}{2m_e},$$

resulta que

$$\omega^2 - \omega_o^2 - 2\omega\omega_L = 0, \quad (9.18)$$

$$\omega^2 - \omega_o^2 + 2\omega\omega_L = 0. \quad (9.19)$$

Nas duas equações 9.18 e 9.19, somando ω_L^2 aos dois lados das mesmas,

$$\omega^2 + \omega_L^2 - 2\omega\omega_L = \omega_o^2 + \omega_L^2, \quad (9.20)$$

$$\omega^2 + \omega_L^2 + 2\omega\omega_L = \omega_o^2 + \omega_L^2, \quad (9.21)$$

resulta que

$$(\omega - \omega_L)^2 = \omega_o^2 + \omega_L^2, \quad (9.22)$$

$$(\omega + \omega_L)^2 = \omega_o^2 + \omega_L^2. \quad (9.23)$$

Considerando que o valor de $\omega_L \ll \omega_o$, pode-se simplificar as equações 9.22 e 9.23, obtendo-se a frequência angular de cada um dos elétrons:

$$\omega_1 = \omega_o + \omega_L, \quad (9.24)$$

$$\omega_2 = \omega_o - \omega_L. \quad (9.25)$$

Os momentos magnéticos para cada um dos elétrons podem ser obtidos de forma clássica utilizando a Eq. 9.9:

$$\mu_1 = I_1 A = \frac{-e\omega_1}{2\pi} \pi R^2 = \frac{eR^2}{2} (\omega_o + \omega_L), \quad (9.26)$$

$$\mu_2 = I_2 A = \frac{-e\omega_2}{2\pi} \pi R^2 = \frac{eR^2}{2} (\omega_o - \omega_L). \quad (9.27)$$

Os elétrons terão esta frequência, ω_L , de rotação em torno do campo magnético externo. Neste exemplo considerou-se o caso particular em que o campo externo é perpendicular ao plano da órbita. Quando o campo externo

atua sobre o átomo de dois elétrons, ambos adquirem um momento adicional resultando no momento total, μ_{dia} contrário ao campo externo dado por

$$\mu_{dia} = \mu_1 + \mu_2 = -eR\omega_L = -\frac{e^2 R^2 B}{2m_e} \quad (9.28)$$

Como a magnetização pode ser definida a partir do momento magnético por unidade de volume de uma substância, para obter o seu valor basta multiplicar o momento magnético atômico pela densidade atômica “ n_a ”. Como a susceptibilidade é a relação entre a magnetização e o campo externo, pode-se escrever que

$$\chi_{dia} = -\mu_o \frac{n_a \mu_{dia}}{B_o} = -\mu_o \frac{n_a e^2 R^2}{2m_e}. \quad (9.29)$$

Para uma substância típica com

$$R \sim 10^{-10} m; \quad n_a \sim 6 \times 10^{28} m^{-3},$$

pode-se calcular a susceptibilidade utilizando a Eq. 9.29 cujo valor, $\chi_{dia} \sim 10^{-5}$, é da ordem dos valores constantes na tabela 9.1 para as substâncias diamagnéticas.

Todas as substâncias são compostas de átomos e moléculas nos quais os elétrons ocupam órbitas definidas e, evidentemente, o diamagnetismo é uma propriedade geral que também ocorre quando os átomos possuem momentos magnéticos permanentes, já mencionados no paramagnetismo. No caso geral, pode-se dizer que a susceptibilidade magnética será a soma dos dois efeitos,

$$\chi = \chi_{para} + \chi_{dia}. \quad (9.30)$$

O valor do termo diamagnético, como já foi mencionado, em geral, é muito inferior, em módulo, ao paramagnético.

Os materiais chamados diamagnéticos são aqueles que não possuem dipolos magnéticos permanentes, em virtude dos seus átomos ou íons possuírem camadas eletrônicas completas. Os gases nobres, como o He, Ne, Ar, Kr, Xe são portanto diamagnéticos, bem como os compostos como o NaCl, KBr e LiF, da mesma forma, por possuírem camadas completas.

9.3.3 Paramagnetismo

As substâncias com átomos e moléculas com momentos magnéticos permanentes sob a ação de campo magnético externo tendem a alinhar os seus momentos magnéticos, surgindo o efeito paramagnético ao mesmo tempo em que a energia cinética, devida à agitação térmica, produz um desordenamento dos momentos magnéticos, ao se aplicar um campo magnético externo aparece uma competição entre a energia do campo externo e a da temperatura

do corpo. Nos gases a energia térmica é principalmente a energia cinética das moléculas, e a desordem ocorre com o as colisões entre moléculas. Nas substâncias sólidas a agitação responsável pela desordem é a vibracional enquanto que nos líquidos os dois efeitos estão presentes.

A Fig. 9.6(a) ilustra as características dos materiais paramagnéticos descritas acima, mostrando os dipolos, na ausência de campo magnético externo com direções ao acaso. Na mesma Fig. 9.6(b) se observa que a magnetização em função do campo externo, possui um comportamento linear, para uma dada temperatura onde a inclinação é a susceptibilidade.

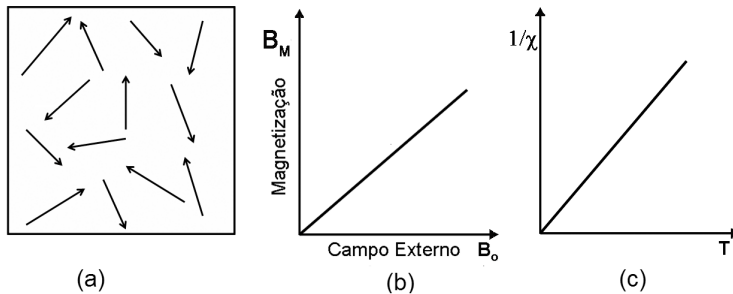


Figura 9.6: (a) Comportamento paramagnético sem campo externo; (b) magnetização do material paramagnético, a temperatura constante, em função do campo externo; (c) inverso da susceptibilidade em função da temperatura.

A forma mais simples de comportamento magnético é o paramagnetismo, como o caso do exemplo apresentado na Fig. 9.6(b), em que a curva $B_M(B_o)$ é linear e intercepta a origem ou ponto de campo externo nulo. Esse tipo de magnetização é reversível ou seja, a curva seguida é a mesma quando aumentamos o campo externo ou quando o diminuímos. A susceptibilidade dos materiais paramagnéticos apresenta algumas características interessantes que pretendemos esclarecer a seguir.

• Paramagnetismo do tipo Curie

O paramagnetismo pode se originar por diferentes causas mas como as curvas que mostram a dependência $B_M(B_o)$ são lineares, costuma-se investigar a origem do paramagnetismo através da relação da susceptibilidade com a temperatura. Se observa no caso da Fig. 9.6(c) que a susceptibilidade segue a função

$$\chi(T) = \frac{C}{T}, \quad (9.31)$$

em que C é uma constante.

A Fig. 9.6(c) nos mostra $1/\chi$ em função de T , o que permite, de forma mais simples, analisar as propriedades dos materiais paramagnéticos pois a inclinação da reta permite obter o valor de C que pode ser relacionado com o momento magnético efetivo do átomo. O comportamento chamado paramagnetismo tipo Curie, que ocorre para materiais nos quais não ocorre interação entre dipolos magnéticos, e a interação tenta alinhar os momentos magnéticos dos átomos com o campo magnético externo. A dependência da susceptibilidade com o inverso da temperatura é o resultado da competição entre a força de alinhamento dos momentos magnéticos paralelos ao campo e a agitação térmica tendendo a romper esse alinhamento. Com o aumento da temperatura, a susceptibilidade diminui devido à agitação térmica que aumenta, reduzindo o efeito do campo externo.

• Paramagnetismo Curie-Weiss

O que torna diferente o magnetismo de Curie-Weiss é o surgimento de interação entre os momentos magnéticos de diferentes átomos. Esta interação entre átomos, denominada interação de troca é que propicia o alinhamento de momentos adjacentes na mesma direção ou, pode mesmo, permitir alinhamento de vizinhos em direções opostas.

Verifica-se experimentalmente que a susceptibilidade de Curie-Weiss pode ser representada por

$$\chi_{cw} = \frac{C}{T - \theta}, \quad (9.32)$$

em que θ é denominada temperatura de Curie-Weiss, relacionada com valor da interação entre momentos. O sinal de θ indica se a tendência é de alinhar ou desalinhar. Na Fig. 9.7 pode-se observar esse fato em torno dessa temperatura para o valor de θ positivo ou negativo. A interação para $\theta > 0$ é denominada interação ferromagnética e $\theta < 0$ interação antiferromagnética.

• Paramagnetismo de Pauli

O paramagnetismo de Pauli é observado nos metais e é devido aos elétrons de condução que possuem momentos magnéticos que podem ser alinhados com o campo magnético externo. A característica principal deste paramagnetismo é que o valor da susceptibilidade χ é quase independente da temperatura e, na maioria dos casos, pequeno.

9.3.4 Ferromagnetismo

Vários metais do grupo de transição do ferro, como o próprio ferro, níquel e cobalto, puros ou formando ligas, apresentam uma magnetização

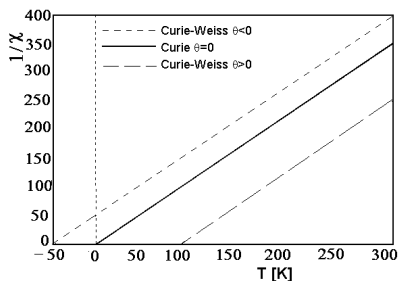


Figura 9.7: Inverso da Susceptibilidade em função de T , para sistemas com comportamento Curie, ou Curie-Weiss.

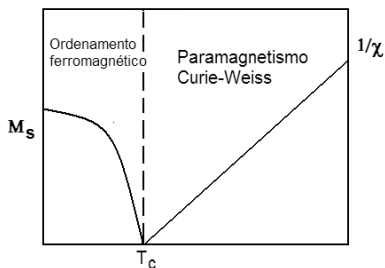


Figura 9.8: Comportamento ferromagnético e paramagnético em torno da temperatura Curie

muito intensa à temperatura ambiente, mesmo sob a ação de pequenos campos magnéticos externos. A magnetita é um desses compostos conhecida, como ímã permanente, há milênios.

Uma teoria para o ferromagnetismo baseada nos momentos magnéticos atômicos, foi proposta por Pierre Weiss. Neste modelo, cada dipolo magnético atômico sofre a ação de um campo magnético médio criado pelos vizinhos, que tende a fazer com que os vizinhos muito próximos formem um domínio de momentos magnéticos na mesma direção. Este campo efetivo, é chamado campo molecular de Weiss e é proporcional à magnetização local do domínio. A origem do campo molecular de Weiss é atribuída a uma energia de troca entre dois elétrons cuja diferença de energia eletrostática resulta de que os spins paralelos possuam uma energia mínima de troca.

Uma amostra de ferro possui uma estrutura de micro-cristais, formando uma estrutura cúbica que no processo de solidificação torna-se policristalina com os micro-cristais orientados ao acaso. A anisotropia de um mono-cristal implica na existência de direções preferenciais de orientação da magnetização M . Essas direções de maior magnetização formam um domínio magnético, no qual a magnetização está saturada, constituindo a chamada *auto-magnetização*. A Fig. 9.9(a) é uma microfotografia de domínios magnéticos de uma amostra de ferro com 3% de silício, onde cada tonalidade indica uma orientação da auto-magnetização. Esses domínios, chamados domínios de Weiss, possuem dimensões que vão de 10^{-6} a 10^{-2}cm^3 . Com base neste modelo, pode-se explicar qualitativamente a magnetização dos materiais ferromagnéticos.

Em uma amostra poli-cristalina inicialmente desmagnetizada, os micro-cristais, ou seus domínios, estão orientados ao acaso e ao aplicar um campo

magnético externo ocorre o alinhamento, relativo, dos domínios. Com o crescimento do campo externo, devido aos defeitos da estrutura cristalina, ocorre o atrito entre as paredes dos domínios, gastando-se energia. Quando se diminui o campo externo, esse atrito impede a reordenação dos microcristais mantendo-se uma magnetização residual, chamada remanência, ocorrendo o chamado efeito de histerese. Na Fig. 9.9b os domínios magnéticos são mostrados sem campo magnético externo e a magnetização é nula, enquanto que no caso 9.9(c), com campo externo, ocorre a orientação dos domínios magnéticos fazendo um realinhamento na direção do campo externo.

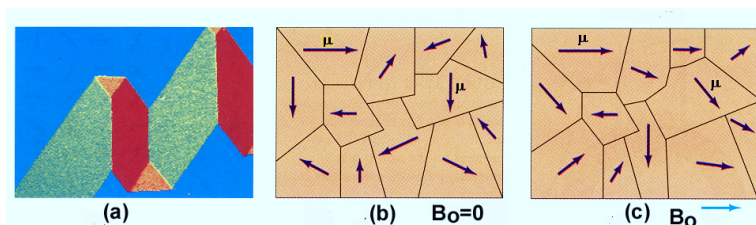


Figura 9.9: (a)micro-fotografia de domínios magnéticos, (b)Domínios magnéticos orientados ao acaso, (c) domínios magnéticos orientados por um campo magnético externo.

Existem duas técnicas, muito simples, para evidenciar a existência de domínios e do atrito entre as paredes dos mesmos. A primeira é a chamada técnica de F. Bitter, pela qual se espalha pó muito fino de ferro, sobre uma superfície polida de um cristal, os contornos do domínio, poderão ser evidenciados sob um microscópio. A segunda técnica é a utilização das variações bruscas de fluxo magnético durante a magnetização. As variações de correntes induzidas, devido ao atrito entre as paredes dos domínios, geram o chamado ruído Berkousen.

O ferromagnetismo é um dos mais importantes tipos de magnetismo por ser o tipo mais forte de magnetismo encontrado nos materiais. As curvas $B_M(B_o)$ e $B_M(T)$ destes materiais apresentam um comportamento não linear e não reversível e essa falta de reversibilidade é chamada *histerese magnética*. As curvas de histerese podem ser obtidas colocando um material ferromagnético no interior de um campo externo, por exemplo, no interior de um solenoide, como mostra a Fig. 9.1, controlando-se o campo externo, através da corrente que circula no solenoide. Aumentando-se o campo externo, o campo total satura e quando se reduz o campo externo B_o , verifica-se, a partir da saturação, que a magnetização segue uma outra função não retornando a zero, quando o campo externo se anula. O valor desta magnetização quando $B_o = 0$ é chamado de magnetização remanente. Uma grande magnetização

remanente é desejável para fitas de gravação magnética, enquanto que para materiais para núcleos de transformadores ela deve ser muito pequena. Os materiais com alta magnetização remanente são comumente chamados ferromagnetos duros e os de pequena magnetização remanente ferromagnetos doces ou suaves.

Esse comportamento da magnetização de substâncias ferromagnéticas é mostrado nas curvas de histerese, presentes na Fig. 9.10. Pode-se observar, nessas curvas, que a magnetização de um ferromagneto pode ser levada a zero aplicando um campo externo negativo de grande intensidade. O campo magnético necessário para anular a magnetização é chamado campo coercivo, ou coercitivo, usualmente escrito como B_C .

A relação da propriedade ferromagnética com a temperatura pode ser observada na Fig. 9.8, que nos mostra o comportamentos da magnetização de saturação em função da temperatura para um material ferromagnético, indicando que acima da temperatura Curie, o material se torna paramagnético seguindo um comportamento do tipo Curie-Weiss. Em um material ferromagnético abaixo da temperatura Curie (T_C), os momentos magnéticos dos átomos ficam todos alinhados na mesma direção, dentro de cada um dos domínios.

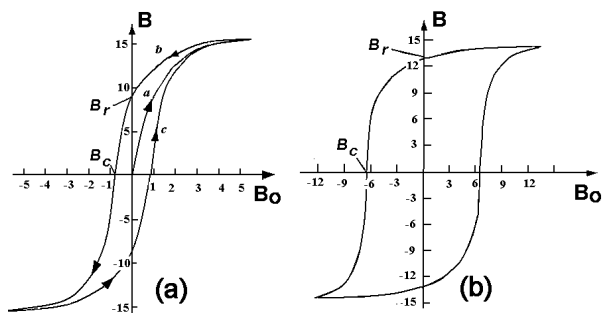


Figura 9.10: Curvas de Histerese de material ferromagnético, (a) para ferro puro, (b) e para um material de fabricação de ímãs permanentes.

9.3.5 Antiferromagnetismo e Ferrimagnetismo

Quando a interação de troca entre dois íons vizinhos é negativa os seus spins alinham-se na mesma direção mas em sentidos opostos. Este ordenamento magnético é de natureza mais complexa que o ferromagnético. Na Fig. 9.11 mostram-se os ordenamentos para antiferromagnetismo e ferrimagnetismo. No caso do antiferromagnetismo o acoplamento oposto anula a

magnetização enquanto que no caso do ferrimagnetismo, como os momentos vizinhos são diferentes, a magnetização resultante é diferente de zero. Apesar do grande interesse científico, os materiais antiferromagnéticos não têm grande aplicação tecnológica enquanto que alguns ferrimagnéticos, como as ferritas, especialmente aquelas produzidas com terras raras, possuem alta magnetização e alta resistividade. Estas propriedades fazem que o seu uso para núcleos de transformadores de alta frequência seja muito importante, pois não ocorre o aquecimento por correntes parasitas como no caso dos ferromagnéticos. Tanto o antiferromagnetismo como o ferromagnetismo são

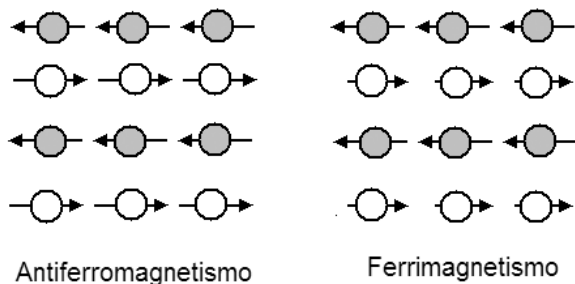


Figura 9.11: Ilustração do ordenamento de spin para os materiais antiferromagnéticos e ferrimagnéticos.

originados pela interação entre os spins. No caso do antiferromagnetismo, há a tendência dos momentos magnéticos de spin sofrerem alinhamento em direções opostas cancelando-se os momentos vizinhos ao alinhar os momentos magnéticos (spin) em direções opostas ou seja, a constante de Curie-Weiss é negativa ($\theta < 0$).

O comportamento antiferromagnético é semelhante ao paramagnético mas a sua origem é completamente diferente pois no paramagnetismo existe um desordenamento em função da temperatura, enquanto que no antiferromagnetismo existe um estado ordenado de longo alcance. Os momentos magnéticos se alinham de forma alternada como está indicado na Fig. 9.11.

O ferrimagnetismo está presente no magnetismo natural como o exibido pela magnetita, registrado já no 6º século AC, é de uma ferrita, um composto contendo íons de oxigênio, O^{2-} , e íons de ferro em dois estados, Fe^{+2} e Fe^{+3} . Os íons de Fe III estão emparelhados em direções opostas e não produzem nenhum campo magnético externo, mas os íons de ferro II estão todos alinhados na mesma direção, sendo responsáveis pelo magnetismo externo.

9.4 Magnetismo Terrestre

Os registros paleomagnéticos indicam que o campo geomagnético existe pelo menos há três bilhões de anos. No entanto, baseando-se no tamanho e na condutividade elétrica do núcleo da terra, se o campo magnético não fosse continuamente gerado, deveria decair em aproximadamente 20.000 anos, pois a temperatura da terra é muito alta para sustentar um magnetismo permanente. Além disso, os registros paleomagnéticos também mostram que a polaridade de dipolo do campo magnético terrestre sofreu, no passado, várias reversões com um tempo médio de reversão de 200.000 anos, mas com eventos aleatórios de reversão acontecendo em apenas 20.000 anos.

Com estas observações, questiona-se o tipo de mecanismo capaz de gerar o campo magnético terrestre contínuo. Discute-se há muito tempo que este mecanismo é um dínamo convectivo operando na capa líquida que circunda o núcleo central, composta fundamentalmente de ferro. O núcleo central da Terra tem, aproximadamente, o mesmo diâmetro da Lua mas a sua temperatura é aproximadamente a mesma da superfície do sol. A convecção na capa externa do núcleo central, fluida, supõe-se ser definida tanto pelas fontes térmicas como pela flutuação na fronteira do núcleo central, produzida pelo esfriamento lento da Terra, o fluido de alto teor de ferro, solidifique na forma de liga metálica. Estas forças de flutuação provocam o movimento vertical devido às forças de Coriolis, em função da rotação da terra, fazendo com que o movimento do fluido seja helicoidal. Presume-se que este fluido se movimenta, gira e corta o campo magnético, gerando um novo campo magnético, para substituir aquele que decaí por difusão. Este modelo é o chamado **dínamo convectivo**. Na Fig. 9.12 se observa este modelo, e o campo magnético interno e externo, resultado da simulação numérica recentemente realizada, conforme relata a referência 13, que se encontra no apêndice F.4. Os campos magnéticos, gerados por este modelo, se assemelham ao campo magnético observado, prevendo, inclusive, as características bem conhecidas de reversão temporal e deformação para o Oeste.

9.5 Aplicações Científicas e Tecnológicas

A evolução científica e tecnológica, na produção de materiais magnéticos, pode ser exemplificada em muitas áreas do conhecimento humano, mas uma das que mais se destaca é a do registro magnético de dados, pois nos últimos anos, a densidade de gravação magnética cresceu de forma significativa.

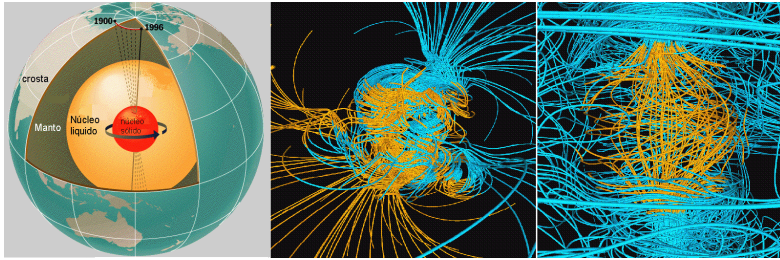


Figura 9.12: (a) Modelo do geodinamo terrestre, (b) campo Magnético simulado no exterior da terra e, (c) no interior da terra. Fonte: referência 13 do apêndice F.4

9.5.1 Aplicação de Materiais Magnéticos

Do ponto de vista da aplicação, os materiais magnéticos podem ser classificados em três grandes classes:

- Materiais Duros
- Materiais Moles
- Materiais Intermediários

Estes três comportamentos estão exemplificados, pelas curvas de histerese, na Fig. 9.13. Os materiais duros são utilizados como ímãs permanentes devido à sua grande magnetização remanente e campo coercitivo o que resulta em um ciclo de histerese com uma grande área. A área da curva de histerese é proporcional à energia de magnetização. Os moles são aqueles facilmente magnetizáveis e também desmagnetizáveis com a retirada do campo externo portanto, são utilizados em núcleos de transformadores e núcleos de solenoides etc. Os materiais que devem manter a magnetização estável, como os meios de gravação magnética são do tipo intermediário. Na tabela 9.2 se apresentam alguns desses materiais.

Tabela 9.2: Exemplos de materiais ferromagnéticos e sua utilização.

Materiais Duros	Materiais Moles	Materiais Intermediários
Ferrite de Bário	Aço Silício	Fe_2O_3
Samário-Cobalto	Ferro	CrO_2
Neodímio-Ferro-Boro	Mumetal	Tintas metálicas de Fe e Co

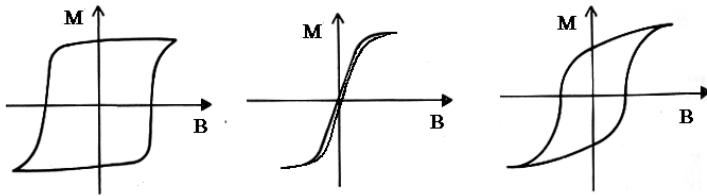


Figura 9.13: Comportamento ferromagnético de vários materiais: (a) materiais duros; (b) materiais Moles; (c) materiais intermediários.

9.5.2 Conformação Mecânica com Forças Magnéticas

A conformação mecânica utilizando campos magnéticos pulsados, teve o seu primeiro estudo feito por um prêmio Nobel, o físico russo, P.L. Kapitza em 1924, que foi capaz de produzir pulsos de 500 kG em 3 ms . As correntes utilizadas em solenoides robustos, atingiu mais de 10.000 A . A estampagem de pequenas moedas foi utilizada por vários pesquisadores e também a fabricação de peças de alumínio tanto na indústria aeronáutica como na automobilística. Na Fig. 9.14 se mostra a forma de uma matriz de estamparia, capaz de produzir uma porta de automóvel, com detalhes de estampagem profunda para a qual utilizaram-se forças magnéticas muito intensas, capazes de conformar os materiais sem produzir a sua ruptura.

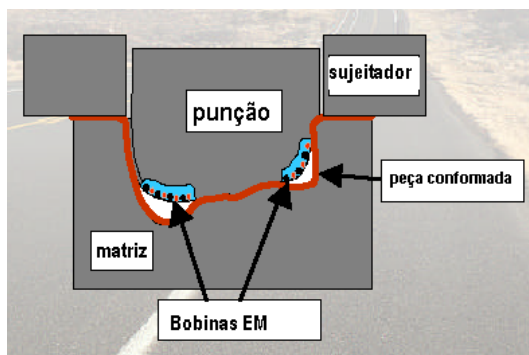


Figura 9.14: Matriz de estamparia de chapas, utilizando a conformação eletromagnética.

9.5.3 Ressonância Magnética Nuclear

Os prótons e nêutrons da mesma maneira que os elétrons possuem momentos magnéticos. Ao colocar prótons dentro de um campo magnético, os seus momentos magnéticos sofrem uma precessão em torno da direção do campo externo, chamada precessão de Larmor. Ao fazer com que o campo externo oscile com uma dada frequência, pode-se fazer coincidir essa frequência com a da precessão, produzindo-se a ressonância. Esse processo é chamado de *ressonância magnética nuclear* (NMR). A ressonância magnética nuclear é aplicada no diagnóstico médico, no processo chamado de MRI, ou imagem por ressonância magnética, conforme se pode observar na Fig. 9.15. O processo MRI faz com que os tecidos adiposos possam ser distinguidos dos músculos, em virtude de diferente concentração de hidrogênio. Os tumores podem ser destacados na imagem em relação aos tecidos ósseo e nervoso por possuírem menor concentração de hidrogênio.

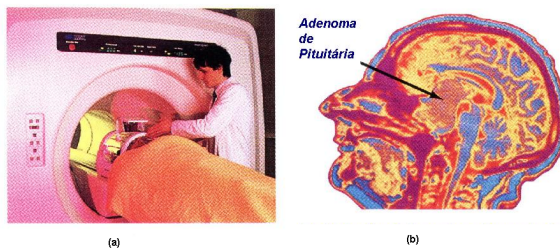


Figura 9.15: (a) Tomógrafo NMR; (b) Imagem mostrando um tumor da glândula pituitária.

9.6 Questões, Problemas e Exercícios

1. Uma das formas mais utilizadas para a detecção de metais enterrados é utilizar uma bobina circular percorrida por uma corrente elétrica alternada. Ao encontrar um material ocorre a variação da corrente na bobina. Explique o princípio de funcionamento desses detectores.
2. Uma das formas mais simples de justificar as características magnéticas dos materiais, diamagnéticas, paramagnéticas ou ferromagnéticas, é utilizar os conceitos de momento magnético atômico. a) A que se deve o momento magnético atômico? b) Tendo em vista a resposta no item anterior, como se explicam as propriedades magnéticas dos materiais?
3. Faça uma análise dos materiais diamagnéticos utilizando a Lei de Faraday-Lenz.
4. Explique porque todos os materiais apresentam propriedades diamagnéticas.
5. O ferromagnetismo é considerado como o resultado de um mecanismo de acoplamento de troca. Explique o que vem a ser esse mecanismo.
6. As curvas de histerese são características para a escolha dos materiais ferromagnéticos. Explique que tipo de curva de histerese seria interessante, que o material possuísse, para as seguintes aplicações, justificando a escolha: a) fita de gravação; b) núcleo de um transformador e núcleo de um solenoide; c) ímã permanente.
7. Uma medida do campo magnético terrestre em um dado local indicou que a sua componente horizontal era de $25 \mu T$ e a inclinação era de 76 graus. Qual o módulo do campo magnético da terra nesse ponto.
8. Discuta qual a origem das variações do campo magnético terrestre a curto (no mesmo dia) e a longo prazo (séculos).
9. O campo magnético terrestre é muito semelhante ao campo produzido por um ímã de barra. Utilizando o modelo do dínamo convectivo, justifique esta conformação de campo magnético.

Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

*Em 1831 nascia **James Clerk Maxwell** e nesse mesmo ano a Royal Society publica o mais famoso experimento da indução produzido por Faraday. A lei de Faraday mostra como a eletricidade e o magnetismo estão relacionadas e Maxwell ao introduzir a corrente de deslocamento na lei de Ampère, ampliou a aplicação desta relação. A forma atual de representar os fenômenos eletromagnéticos, de forma consistente e completa, é baseada nas quatro Equações de Maxwell, cuja consequência mais importante é prever a existência das ondas eletromagnéticas, que se propagam no espaço livre com a velocidade da luz. De 1885 a 1889, **Heinrich Hertz** produziu e detectou ondas eletromagnéticas, no seu laboratório, confirmando a teoria do eletromagnetismo de Maxwell.*

10.1 Introdução

As equações de Maxwell compreendem as leis de Gauss para o campo elétrico e magnético a lei de Ampère, generalizada por Maxwell, e a lei de Faraday. A formulação matemática das ideias propostas nessas leis, através dos operadores diferenciais (gradiente, divergente e rotacional) é que permitiu, a Maxwell, sintetizar uma teoria completa, muito concisa, acerca do eletromagnetismo, possibilitando o entendimento da geração das ondas eletromagnéticas. Não é um exagero dizer que se trata de uma das mais belas teorias da física.

Certamente o maior mérito das equações de Maxwell é mostrar que a ótica faz parte do eletromagnetismo, mostrando que a luz é uma configuração de campos elétricos e magnéticos, variáveis no tempo, que se sustentam mutuamente, cuja velocidade de propagação é igual à velocidade da luz. Por outro lado, esta teoria também mostra que a velocidade de propagação da luz pode ser determinada por meio de medidas puramente elétricas e magnéticas.

Neste capítulo vamos comprovar que a luz é uma configuração dos campos elétrico e magnético. Além disso mostra-se que as leis de Maxwell preveem a conservação da carga elétrica, o transporte de energia associado a uma onda eletromagnética e a obtenção do índice de refração. Nesta análise utilizam-se as leis de Maxwell tanto na forma integral como diferencial.

10.1.1 Equações de Maxwell na forma Integral

Inicialmente vamos comentar, de forma resumida, o significado das leis de Maxwell na sua forma integral lembrando o estudo das mesmas, já feito nos capítulos anteriores.

1. **Lei de Gauss** para o campo elétrico:

$$\varepsilon_o \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q, \quad (10.1)$$

na forma integral, estabelece que o fluxo do campo elétrico é proporcional à carga elétrica contida no interior de uma superfície fechada, S , denominada gaussiana.

2. **Lei de Gauss** para o campo magnético:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (10.2)$$

aplicada ao campo magnético estabelece que o fluxo magnético através de uma gaussiana é sempre nulo, e isto quer dizer que as linhas de campo nunca divergem nem convergem para um ponto, pois os pólos magnéticos são inseparáveis levando a considerar a inexistência da carga magnética.

3. **Lei de Ampère-Maxwell**,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (10.3)$$

generalizada por Maxwell, mostra que a circulação do vetor campo magnético ao longo de qualquer trajetória fechada é proporcional à soma

da corrente total mais a variação temporal do fluxo do campo elétrico que atravessa a superfície limitada pela circulação.

4. Lei de Faraday-Lenz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (10.4)$$

estabelece que a circulação do campo elétrico, ao longo de uma trajetória fechada, é proporcional ao valor negativo da variação do campo magnético através da superfície limitada por essa circulação.

As equações de Maxwell nos mostram que a simetria entre o campo elétrico e magnético não é perfeita pois tudo leva a crer que os pólos magnéticos não existem de forma isolada. Dessa maneira a lei de Faraday não contém um termo análogo a $\mu_o I$ pois não existe uma carga magnética livre, que forme uma corrente magnética.

10.1.2 Equações de Maxwell na forma diferencial

As equações de Maxwell, na forma integral, são escritas envolvendo o cálculo da circulação e do fluxo dos vetores campo elétrico e magnético e utilizando-se os teoremas de Gauss e Stokes, do cálculo vetorial, presentes no Apêndice B é possível reescreve-las na forma diferencial.

A lei de Gauss para o campo elétrico pode ser reescrita a partir da consideração de que a carga elétrica, no interior de uma gaussiana, é a integral da densidade de carga no volume limitado por essa superfície,

$$q = \int_V \rho \, dv, \quad (10.5)$$

sendo ρ a função densidade volumétrica de carga. Aplicando o teorema de Gauss (T.G.), chega-se a

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho \, dv \quad \xrightarrow{\text{T.G.}} \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \int_V \rho/\epsilon_o \, dv. \quad (10.6)$$

Observa-se que a igualdade entre as duas integrais de volume só é possível se os integrandos forem idênticos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o, \quad (10.7)$$

o que nos mostra que a divergência do campo elétrico, em um dado ponto do espaço, é dada pelo valor da densidade de carga nesse ponto.

Da mesma forma, aplicando o teorema de Gauss à Eq. 10.2,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \xrightarrow{T.G.} \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0, \quad (10.8)$$

observa-se que a divergência do campo magnético será sempre nula,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.9)$$

Desta maneira as duas primeiras Leis de Maxwell, Eq. 10.7 e Eq. 10.9, podem ser descritas em termos do divergente dos respectivos campos elétrico e magnético.

A leis de Ampère e Faraday também podem ser reescritas, mas com a aplicação do teorema de Stokes (T.S.).

Para a lei de Ampère essa operação resulta em:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \xrightarrow{T.S.} \\ \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} &= \mu_o \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \left(\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \right). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Levando em consideração que o campo elétrico é uma função das coordenadas, espaciais e temporal $E(x, y, z, t)$, pode-se escrever que

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \int_A \left(\mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}. \quad (10.11)$$

Essa igualdade só é admissível quando os integrandos forem idênticos;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.12)$$

Escrita dessa maneira a lei de Ampère, Eq. 10.12, estabelece que o rotacional do campo magnético é proporcional à densidade de corrente e também à variação temporal do campo elétrico.

Da mesma forma aplicando o teorema de Stokes à lei de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \xrightarrow{T.S.} \quad \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (10.13)$$

Como o campo magnético é uma função das coordenadas espaciais e temporal, ou seja, $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$, invertendo-se, no segundo termo, a ordem das operações, tomando primeiro a derivada e depois a integral com transformação da derivada ordinária em uma derivada parcial $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, chega-se a:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (10.14)$$

onde, novamente, a igualdade só será possível, quando os integrandos forem iguais, portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (10.15)$$

Dessa maneira é possível observar que a lei de Faraday, Eq. 10.15, estabelece que o rotacional do campo elétrico é proporcional ao valor negativo da variação temporal do campo magnético.

Agora, de forma resumida, mostramos como na passagem da forma integral para a forma diferencial as quatro equações de Maxwell assumem a seguinte forma:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_o} \xrightarrow{T.G.} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (10.16)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \xrightarrow{T.G.} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.17)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_c + \mu_o \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \xrightarrow{T.S.} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.18)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \xrightarrow{T.S.} \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (10.19)$$

É preciso lembrar que as equações de Maxwell, ao serem escritas na forma diferencial não devem alterar seu significado físico podendo-se, portanto, chegar às mesmas conclusões, mas de uma forma um pouco diferente, como se discute a seguir:

- ao reescrever a lei de Gauss na forma diferencial, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o$ pode-se dizer que se dentro de um volume de controle existe uma divergência de campo elétrico é porque existe uma carga elétrica líquida no interior desse volume. Pode-se acrescentar, ainda, que o campo elétrico depende da forma da função densidade de carga. Quando a divergência for positiva (mais linhas de campo saem do que entram na superfície), é porque

existe uma carga líquida positiva no interior da superfície, ou seja, há uma “fonte” de linhas de campo elétrico que atravessam a superfície de dentro para fora. Mas, se a divergência for negativa (mais linhas de campo entrando do que saindo da superfície) é porque existe uma carga líquida negativa no interior da superfície, ou seja, há um “sorvedouro” de linhas de campo elétrico que atravessam a superfície de fora para dentro. Deste modo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ significa que não há carga líquida no interior da superfície, ou seja, o número de linhas de campo elétrico que atravessam a superfície de dentro para fora é igual ao número de linhas de fora para dentro;

- consequentemente, ao escrevermos a lei de Gauss para o magnetismo como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ estamos afirmando que é impossível a existência de monopólos magnéticos isolados;
- para a terceira equação, ou lei de Ampère, temos que analisar os dois termos do segundo membro em relação ao termo do primeiro membro. O termo $\mu_o \vec{J}$ nos diz que se existe densidade de corrente \vec{J} atravessando uma superfície aberta então existirá um campo magnético que “circulará” em torno de \vec{J} . O segundo termo, $\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ mostra que se existe um campo elétrico variável no tempo, atravessando uma superfície aberta, então um campo magnético induzido “circulará” este campo elétrico ao longo da curva \mathbf{C} , conforme mostra a Fig. 10.1;
- a lei da indução de Faraday escrita como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nos diz que se um campo magnético, que varia no tempo, por exemplo com uma taxa positiva (\vec{B} está crescendo), atravessando uma superfície aberta, ocorre a indução de um campo elétrico que “circulará” em torno do campo magnético \vec{B} ao longo da curva que limita essa superfície e perpendicularmente à sua direção, como se pode observar na Fig. 10.2. O sinal negativo significa que este campo elétrico induzido se oporá a à variação do campo magnético.

10.2 Propagação de Campos e Ondas EM

As equações de Maxwell, especialmente as Leis de Ampère e Faraday, tanto na forma integral como na diferencial, nos mostram como os campos elétricos e magnéticos se influenciam mutuamente, podendo-se dizer que são associados. Como consequência desta associação eles podem transportar energia e momento a distâncias muito maiores do que aquelas previstas tanto pela lei de Coulomb como pela lei de Biot-Savart, que possuem um comportamento $1/r^2$. Os campos elétricos e magnéticos associados produzem ondas que se

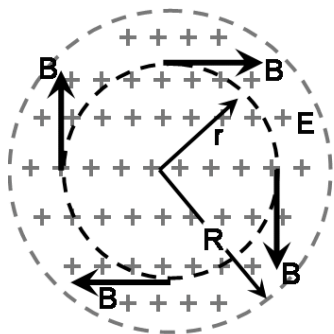


Figura 10.1: Campo magnético induzido por fluxo elétrico variável no tempo, $\frac{d\vec{E}}{dt} > 0$.

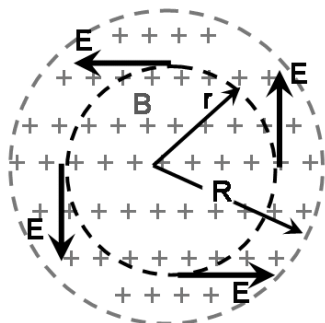


Figura 10.2: Campo elétrico induzido por fluxo magnético variável no tempo, $\frac{d\vec{B}}{dt} > 0$.

deslocam sob a forma de **ondas eletromagnéticas**. Essas ondas se apresentam sob várias denominações de acordo com a sua frequência ou utilidade, destacando-se as ondas de rádio, televisão, microondas, luz visível, luz artificial, raios x, radiação gama, radar e laser, conforme nos mostra o diagrama da Fig. 10.9. Como muitas dessas ondas são produzidas na natureza, poderíamos dizer que as ondas eletromagnéticas sempre fizeram parte do nosso universo, (*"Fiat Lux Panis"*).

10.2.1 Ondas Eletromagnéticas

Utilizando as equações de Maxwell, é possível demonstrar que os campos elétrico e magnético obedecem às equações de onda e pode-se calcular a velocidade de propagação dessas ondas no espaço vazio ou num meio material mostrando-se, também, que os campos elétrico e o magnético estão em fase e as suas amplitudes estão relacionadas. Para estabelecer de forma simples a relação entre o campo elétrico e magnético vamos considerar um condutor como o que está mostrado na Fig. 10.3(a), percorrido por uma corrente elétrica I .

A propagação do campo magnético, no espaço, em forma de anéis em volta do condutor terá a sua intensidade variável, se a corrente variar no tempo. Supondo que a corrente cresce com o tempo, o campo magnético e consequentemente o fluxo magnético que atravessa a área A , no plano xz , aumentará. De acordo com a lei de Faraday a variação do campo magnético, no tempo, gera uma força eletromotriz, ao longo de um contorno, nessa área, como está mostrado na Fig. 10.3(b).

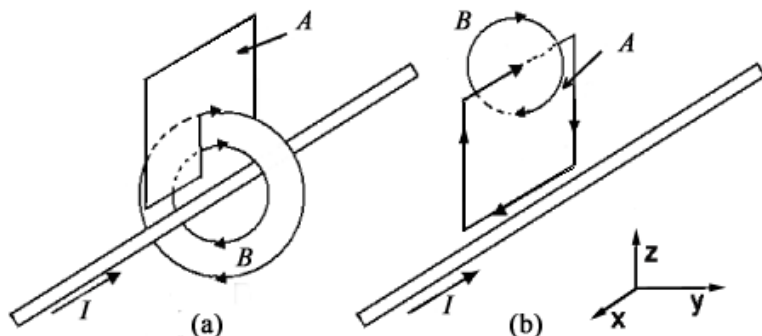


Figura 10.3: Campo magnético produzido pela corrente I que percorre um condutor: (a) pela lei de Ampère o campo magnético forma círculos concêntricos no plano normal ao condutor percorrido por uma corrente elétrica, (b) se a corrente elétrica for uma função variável com o tempo o campo magnético resultante, também o será produzindo um campo elétrico que por sua vez introduz uma variação no campo magnético e assim por diante.

Utilizando a lei de Lenz é possível determinar a direção do campo elétrico induzido. Nessa mesma figura pode-se observar que na linha superior do contorno aparece um campo magnético produzido pelo campo elétrico variável ou seja, a variação do campo elétrico induzido também produz um fluxo magnético através do plano A , pelo surgimento de uma corrente de deslocamento. Dessa forma pode-se concluir que:

- quando a corrente elétrica é restrita a um condutor os campos propagam-se em uma simetria cilíndrica e os campos induzidos apresentam uma simetria, na qual o campo elétrico é paralelo à corrente e o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico e à direção de propagação; esta é uma característica geral das ondas eletromagnéticas;
- a corrente elétrica, fonte dos campos elétrico e magnético, deve variar no tempo para haver a produção de ondas eletromagnéticas. Quando a corrente é estática produz-se um campo magnético estático. Para haver a produção de campos elétricos e magnéticos que se propagam é necessário haver a aceleração de cargas elétricas. Dessa forma pode-se antecipar que se o movimento das cargas elétricas for harmônico, os campos \vec{E} e \vec{B} terão uma dependência também harmônica.

10.2.2 Dedução das Equações de Onda para \vec{E} e \vec{B}

Para a dedução da equação de onda relaciona-se a derivada espacial de cada um dos vetores, \vec{E} ou \vec{B} , com a derivada temporal do outro aplicando as leis de Ampère e Faraday. Na Fig. 10.4 representam-se as linhas de campo para um caso particular de campo elétrico, na direção Y , e campo magnético, na direção Z .

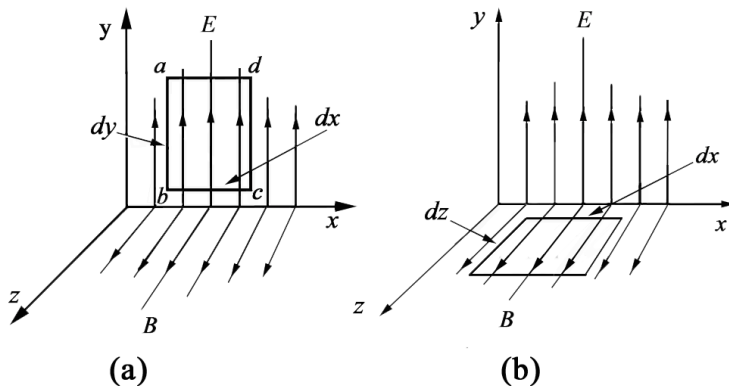


Figura 10.4: Modelo para aplicações das equações de Maxwell, para a dedução simplificada das equações de onda para \vec{E} e \vec{B} .

Utilizando a Fig. 10.4(a) aplica-se a Lei de Faraday à circulação retangular \overline{abcd} ,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \tag{10.20}$$

e ao calcular a circulação do campo elétrico utiliza-se um retângulo, infinitesimal portando,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_b dy - E_c dy. \tag{10.21}$$

Utilizando uma aproximação linear,

$$E_b - E_c \simeq \frac{dE}{dx} dx, \tag{10.22}$$

a circulação pode ser calculada por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \simeq \frac{dE}{dx} dx dy. \tag{10.23}$$

O fluxo do campo magnético através da área $dx dy$ será

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dx dy. \tag{10.24}$$

Aplicando na equação de Faraday 10.20, as equações 10.23 e 10.24, chega-se à relação

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \quad (10.25)$$

Agora, aplicando a lei de Ampère ao retângulo da Fig. 10.4(b), considerando que não existe corrente atravessando a área limitada pelo mesmo, resulta em:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (10.26)$$

Seguindo uma argumentação análoga à das equações 10.22, 10.23 e 10.24 calcula-se a circulação do campo magnético e o fluxo do campo elétrico associado:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{dB}{dx} dx dz, \quad (10.27)$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dx dz, \quad (10.28)$$

e dessa maneira, a Lei de Ampère poderá ser escrita da seguinte maneira:

$$-\frac{dB}{dx} = \mu_o \varepsilon_o \frac{dE}{dt} \quad (10.29)$$

As equações, 10.25 e 10.29, demonstram a associação do campo elétrico e magnético em cada ponto do espaço. Derivando essas duas equações a primeira em relação a x e a segunda em relação a t ,

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -\frac{d^2 B}{dx dt}, \quad (10.30)$$

$$-\frac{d^2 B}{dt dx} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (10.31)$$

e eliminando o campo magnético resulta em:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d^2 E}{dt^2}, \quad (10.32)$$

que é a equação de onda para o campo elétrico. Seguindo o mesmo método se obtém a equação de onda para o campo magnético:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d^2 B}{dt^2}. \quad (10.33)$$

Estas duas equações de onda 10.32 e 10.33, indicam que tanto o campo elétrico como o magnético, se propagam no espaço livre, com uma velocidade:

$$v = \frac{1}{(\sqrt{\mu_o \varepsilon_o})} = c. \quad (10.34)$$

A Eq. 10.32 é uma equação de onda para o campo elétrico, cuja solução bem conhecida, é a equação das ondas planas e harmônicas que se propagam na direção x :

$$E_y = E_o \text{seno}(kx - \omega t + \theta), \tag{10.35}$$

onde E_o é a amplitude da onda, k o número de ondas, ω a frequência angular e θ é a diferença de fase.

A equação 10.29 acopla as componentes do campo elétrico e magnético que para esta solução resulta em:

$$\frac{dB_z}{dt} = -\frac{dE_y}{dx} = -kE_o \text{cos}(kx - \omega t + \theta). \tag{10.36}$$

A solução para o campo magnético será

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_o \text{sen}(kx - \omega t + \theta) = B_o \text{sen}(kz - \omega t + \theta), \tag{10.37}$$

consequentemente,

$$\frac{E_o}{B_o} = \frac{\omega}{k}. \tag{10.38}$$

Como $\omega/k = c$, chega-se à seguinte relação entre os campos:

$$\frac{E}{B} = c. \tag{10.39}$$

Além desta relação, tão importante, também é possível provar que o campo elétrico e magnético são perpendiculares entre si e estão em fase, pois $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

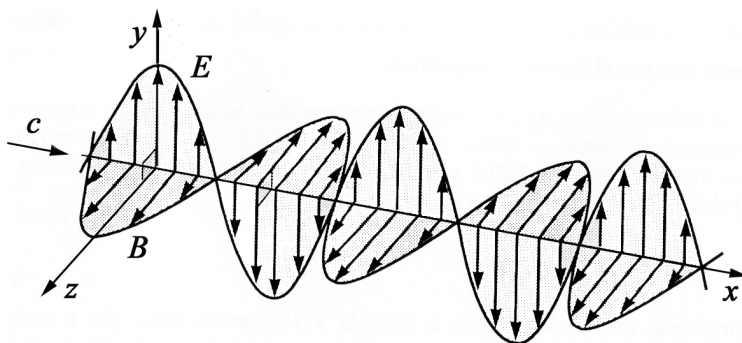


Figura 10.5: Propagação do campo elétrico e magnético ao longo do eixo x , formando uma onda eletromagnética.

Na Fig. 10.5 observa-se como a propagação de uma onda eletromagnética, ao longo do eixo x , em que o campo elétrico e magnético são acoplados e ortogonais.

10.3 Transporte de Energia e Momento

As ondas eletromagnéticas transportam energia e momento e esse é um fato fácil de comprovar, na vida diária, pois todos nós nos aquecemos com a radiação solar ou a utilizamos para aquecer água em um coletor solar. Já o transporte de momento não é tão fácil de comprovar, no dia a dia, podendo ser observado tanto em experimentos atômicos e nucleares.

A idéia de uma nave movida por uma vela solar refletora, é muito antiga, foi sugerida por Kepler e é hoje um projeto muito importante para os sistemas avançados de propulsão espacial. Os fótons não possuem massa, mas possuem momento. Os cientistas, pelo menos os que acreditam nas possibilidades do voo solar, preveem que o fóton perderá energia ao se chocar contra a superfície espelhada da vela da espaçonave e que a energia será suficiente para movimentar a nave no ambiente de vácuo do espaço. Uma série de naves espaciais baseada neste princípio estão sendo lançadas desde 2003.

A energia das ondas eletromagnéticas pode ser obtida utilizando os conceitos de densidade da energia do campo elétrico e magnético, obtidos nos capítulos anteriores. A densidade de energia do campo eletromagnético pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_o} + \frac{\varepsilon_o E^2}{2}. \quad (10.40)$$

Utilizando a relação entre o campo elétrico e magnético, presente na equação 10.39, chega-se às seguintes expressões, para a densidade instantânea de energia:

$$u = \varepsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o} = \frac{EB}{\mu_o c}. \quad (10.41)$$

Levando em consideração o carácter ondulatório, é possível calcular o valor da densidade média de energia, substituindo os campos E e B pelos seus valores médios quadráticos ou *rms*:

$$E_{rms} = \frac{E_o}{\sqrt{2}}; \quad B_{rms} = \frac{B_o}{\sqrt{2}}. \quad (10.42)$$

A **intensidade**, I das ondas eletromagnéticas, é um conceito muito utilizado e representa a energia eletromagnética média que passa, por unidade de tempo, através de uma área unitária, normal à direção de propagação e é dada por

$$I = \bar{u} \cdot c = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_o} = \frac{E_o B_o}{2\mu_o}. \quad (10.43)$$

A intensidade das ondas eletromagnéticas, calculada a partir do valor médio de energia, também pode ser definida com sênto o m3dulo do **vetor de Poynting**, definido por *John Poynting*¹ como sendo:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_o}. \quad (10.44)$$

Assim, a intensidade da radiaç3o pode ser calculada como sendo

$$I = \overline{|\vec{S}|}, \quad (10.45)$$

em que o vetor \vec{S} define a intensidade m3dia a direç3o e o sentido de propagaç3o da ondas eletromagn3ticas.

A energia e o momento est3o relacionadas atrav3s da relaç3o gen3rica $p = vE/c^2$, que nos fornece o momento por unidade de volume associado a uma onda eletromagn3tica. Como a radiaç3o eletromagn3tica se propaga com velocidade c , portanto $v = c$, chega-se ao valor do momento de uma onda eletromagn3tica:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (10.46)$$

Em 1905 Albert Einstein explicou o efeito fotoel3trico pelo qual a luz ultravioleta ejeta el3trons quando incide sobre os metais. Para explicar esse fato lanç3o a hip3tese de que a radiaç3o eletromagn3tica interage com os el3trons de um metal atrav3s da troca de f3tons, part3culas que possuem energia $h\nu$. De uma certa forma 3 essa uma teoria corpuscular da luz, mas mantendo as propriedades ondulat3rias, pela relaç3o de energia dos f3tons $E = h\nu$, onde o valor de ν representa a frequ3ncia das ondas eletromagn3ticas e h 3 constante de Planck, ($h = 6,6 \times 10^{-34} Js$). Desta forma diz-se que a radiaç3o eletromagn3tica 3 quantizada.

10.3.1 Press3o da Radiaç3o

Considerando que as ondas eletromagn3ticas possuem um momento associado pode-se imaginar que uma part3cula, como o el3tron, pode ter o seu movimento modificado pela interaç3o com as mesmas. Para descrever esta interaç3o vamos considerar um problema, simples em que o campo el3trico E 3 orientado na direç3o y e o campo magn3tico B na direç3o z . Uma part3cula

¹F3sico Ingl3s (1852-1914), professor em Cambridge (1878), que investigou a energia das ondas eletromagn3ticas criando o teorema que leva o seu nome.

com carga elétrica, ao interagir com essas ondas eletromagnéticas, sofrerá a ação da força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (10.47)$$

A força elétrica atua na direção do campo elétrico, modificando a velocidade, neste caso na direção y , e conseqüentemente a energia cinética da partícula. Considerando que a partícula tenha velocidade inicial nula, pode-se dizer que

$$v_y = \frac{qEt}{m} \quad (10.48)$$

portanto a energia cinética da partícula será modificada por um valor

$$\Delta E_c = \frac{mv_y^2}{2} = \frac{q^2 E^2 t^2}{2m}. \quad (10.49)$$

A força magnética atua na mesma direção de propagação da onda ou seja na direção x , normal ao plano formado pelo campo elétrico e magnético, portanto

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_y B \hat{i} = \frac{q^2 E B t}{m} \hat{i}, \quad (10.50)$$

na qual a velocidade foi obtida da equação 10.49. O valor do momento p_x , transferido à partícula pode ser obtido integrando o impulso da força magnética,

$$p_x = \int_0^t F_x dt = \int_0^t \frac{q^2 E B t}{m} dt = \frac{q^2 E B t^2}{2m}. \quad (10.51)$$

Utilizando a relação $E/B = c$,

$$p_x = \frac{q^2 E^2 t^2}{2mc} = \frac{q^2 B^2 c t^2}{2m}. \quad (10.52)$$

Comparando a energia cinética dada pela Eq. 10.49 com o momento, Eq. 10.52 pode-se dizer que o momento transferido é igual à energia dividida pela velocidade da luz. De uma forma simplificada pode-se dizer que a intensidade dividida pela velocidade de propagação é a pressão de radiação:

$$p_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{E_o B_o}{2\mu_o c} = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_o c} = \frac{E_o^2}{2\mu_o c^2}. \quad (10.53)$$

No caso das velas, movidas a luz, considerando que as ondas eletromagnéticas sofram reflexão total na sua superfície, ocorre a transferência de duas vezes o momento dos fótons fazendo com que a pressão, sobre a superfície da vela, também seja duas vezes maior do que a pressão de radiação.

10.3.2 A Conservação da Carga Elétrica

No primeiro capítulo destas notas, discutiram-se os conceitos básicos da eletricidade dentre eles, um dos fundamentais, o da conservação da carga elétrica. A partir das equações de Maxwell é possível demonstrar este importante conceito partindo da idéia que o divergente de qualquer rotacional é nulo, ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (10.54)$$

Deste modo tomando o divergente da Lei de Ampère, Eq. 10.12, e aplicando essa condição,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \\ &= \mu_o \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \\ &= \mu_o \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\rho / \epsilon_o), \end{aligned} \quad (10.55)$$

portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (10.56)$$

A equação 10.56, é conhecida como a **equação da continuidade**. Neste caso ela expressa a conservação da carga elétrica pois mostra que se há um fluxo de cargas através de uma superfície, ou seja, se o divergente da densidade de corrente for diferente de zero, então, deve haver uma variação na densidade de carga no interior da superfície. Se a divergência for positiva (fluxo de dentro para fora), a variação da densidade de carga é negativa (a carga diminui no interior da superfície), se a divergência for negativa (fluxo de fora para dentro) a variação da densidade de carga é positiva (a carga aumenta no interior da superfície).

10.3.3 Vetor de Poynting e Transporte de Energia

Um dos pontos mais interessantes da aplicação das leis de Maxwell é a verificação de que o conceito da conservação de energia surge como consequência natural dessas equações. Considerando um volume de controle e realizando o balanço de energia aparece o trabalho feito pelo campo eletromagnético sobre as partículas, com carga elétrica, existentes nesse volume.

Partindo da lei de Faraday multiplicada escalarmente por \vec{B}/μ_o e da lei de Ampère por \vec{E}/μ_o , e posteriormente subtraindo-se uma da outra, obtêm-se

a seguinte relação:

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_o \vec{J} \cdot \vec{E} - \left(\mu_o \varepsilon_o \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (10.57)$$

Interpreta-se o termo do lado direito desta relação partindo da idéia do divergente aplicado ao produto vetorial de dois vetores quaisquer \vec{F} e \vec{G} :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}. \quad (10.58)$$

Como o segundo termo do lado direito da Eq. 10.57 por ser escrito como,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_o \varepsilon_o \vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}), \quad (10.59)$$

resulta que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \mu_o \vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_o \varepsilon_o E^2 + B^2). \quad (10.60)$$

Portanto, o divergente do vetor de Poynting \vec{S} pode ser escrito como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_o} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_o E^2 + B^2), \quad (10.61)$$

ou seja, a energia que atravessa uma dada superfície fechada A , pode ser calculada pela integral do divergente do vetor \vec{S} , no volume limitado por essa superfície,

$$\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV. \quad (10.62)$$

Com a integração da Eq. 10.61, sobre o volume de controle, e aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo é possível obter o teorema de Poynting:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o} \right) dV. \quad (10.63)$$

Dessa maneira a relação entre os integrandos será:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o} \right) = 0. \quad (10.64)$$

Utilizando, a Eq. 10.40, o teorema de Poynting, poderá ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (10.65)$$

Para o vácuo, uma forma simplificada da Eq. 10.65, pode ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (10.66)$$

Por outro lado, para sistemas estacionários, quando a densidade de energia permanece constante, o teorema de Poynting tomará a seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E} = 0. \quad (10.67)$$

Comparando a Eq. 10.66 com a Eq. 10.56 observa-se que elas têm a mesma forma. Então esta equação nada mais é do que a equação da continuidade referindo-se, agora, à conservação da energia. A variação da densidade de energia dentro de um volume limitado, por uma dada superfície, indica que existe um fluxo de energia através dessa superfície. Este fluxo de energia é devido à existência de divergência do vetor de Poynting através dessa superfície. O vetor de Poynting é definido de modo que represente a taxa de variação de energia por unidade de área. Assim a divergência de \vec{S} positiva indica que a densidade de carga diminui, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial t}$ é negativo e vice-versa.

10.3.4 Radiação de Dipolos Oscilantes

A análise das ondas eletromagnéticas nos mostrou que a fonte destas ondas é de uma carga elétrica oscilante. De forma genérica descreveremos dois casos importantes, de geração de ondas eletromagnéticas, o **dipolo elétrico** e o **dipolo magnético** oscilantes.

- **Radiação de dipolo elétrico**

A radiação de dipolo elétrico é produzida por um dipolo oscilante no qual ocorre o movimento relativo de cargas elétricas, cujo momento p , varia com o tempo,

$$p = p_o \text{sen} \omega t. \quad (10.68)$$

Quando o momento de dipolo elétrico oscila, além do campo elétrico, está presente um campo magnético associado ao campo elétrico. A Fig. 10.6.(a) mostra os campos E , B e S que dão a direção do fluxo de energia e momento de um dipolo elétrico.

- **Radiação de dipolo magnético**

Um dipolo magnético elementar é formado por uma pequena espira de corrente, como a mostrada na Fig. 10.6.(b). Se a corrente variar no tempo, de forma harmonica, $I = I_o \text{sen} \omega t$, aparece um momento magnético dipolar oscilante dado por:

$$m_b = I A \text{sen} \omega t, \quad (10.69)$$

em que A é a área da espira e I a corrente elétrica. Quando o dipolo magnético oscila o seu campo magnético também oscila e dessa maneira criando-se um campo elétrico associado, de acordo com a lei de Faraday. Na Fig. 10.6(b) observam-se os campos elétricos e magnéticos produzidos por um dipolo magnético e a orientação relativa dos campos E e B e do vetor de Poynting S , mostrando a direção do fluxo de energia e momento de forma radial.

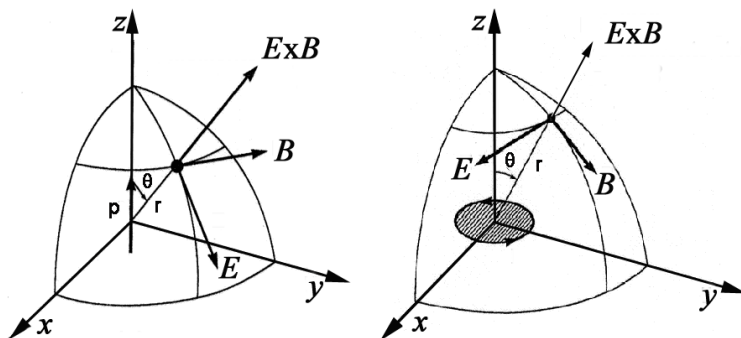


Figura 10.6: Direção e sentidos relativos dos vetores \vec{E} , \vec{B} , \vec{r} e \vec{S} , mostrando a direção de transporte de energia, (a) relativo a um dipolo elétrico, \vec{p} , oscilante, (b) dipolo magnético oscilante, (uma pequena espira de corrente na origem).

Os dispositivos capazes de emitir ou absorver, eficientemente, ondas eletromagnéticas são chamados de forma genérica **antenas** e o sistema mais simples é a chamada antena dipolar, seja ela de dipolo elétrico ou magnético. A radiação emitida por esse dispositivo é denominado **radiação dipolar**. Uma antena dipolar elétrica é formada por um condutor linear, sobre o qual a carga elétrica oscila em movimento harmônico. A Fig. 10.7 nos mostra como um par de cargas de sinais opostos (dipolo, oscila num condutor retilíneo, sob a ação de um oscilador ou gerador de corrente alternada. Na mesma figura, pode-se observar o campo elétrico e magnético associados o que constitui as ondas eletromagnéticas emitidas pela antena.

Uma das coisas mais importantes, a entender neste curso, é que além das antenas dipolares de telecomunicações, tanto receptora como emissora, tal como a antena de um rádio ou de uma televisão também existem outros dispositivos, que não foram projetados como antenas propriamente ditas, mas emitem radiação eletromagnética baseados no mesmo princípio das antenas. Citamos o caso dos aparelhos eletrodomésticos, as linhas de transmissão de

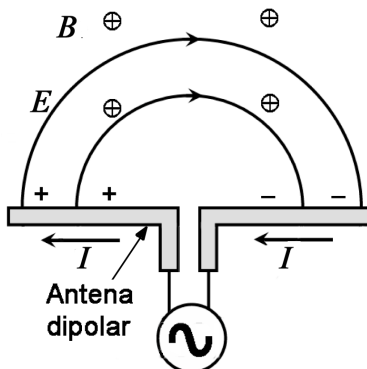


Figura 10.7: Emissão de ondas eletromagnéticas por uma antena dipolar, na qual pares de cargas iguais e opostas oscilam em movimento harmônico ao longo do condutor horizontal. Com inversão temporal da corrente, as direções do campo elétrico e magnético também se invertem.

energia elétrica, os motores elétricos ou seja, todos os dispositivos elétricos onde se possa ter variação de corrente ou de tensão. No caso de equipamentos elétricos que funcionem em corrente alternada a emissão de radiação é permanente durante o seu funcionamento.

Para entender uma das mais importantes características das antenas é preciso conhecer o alcance da radiação, ou de como a intensidade decresce com distância. O fluxo de energia por unidade de tempo, ou seja a potência eletromagnética que atravessa uma dada superfície normal à direção de propagação, é dada por

$$P = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}. \tag{10.70}$$

Para que a potência eletromagnética P seja independente de r , é necessário que o campo elétrico varie segundo uma função $1/r$. Para o campo magnético se espera o mesmo comportamento. Este comportamento contrasta com o comportamento $1/r^2$ para os campos estáticos. No caso de um emissor no qual o campo elétrico tenha intensidade independente da direção de propagação, substituindo o valor do módulo do vetor de Poynting, de acordo com a equação 10.41, chega-se a

$$P = c\varepsilon_0 E^2 (4\pi r^2), \tag{10.71}$$

no qual r é a distância do emissor a um ponto qualquer. Utilizando o conceito de intensidade da radiação I , apresentado na equação 10.43, e do valor da

densidade de energia Eq. 10.41, pode-se escrever potência como

$$P = 2I(4\pi r^2) = 8\pi I r^2. \quad (10.72)$$

Considerando que a potência seja independente de \vec{r} , ou seja, a fonte emite com uma potência constante a intensidade da radiação será dada por

$$I = \frac{P}{8\pi r^2}. \quad (10.73)$$

Na discussão sobre campos elétricos estáticos, mostrou-se que as fontes pontuais produzem campos com simetria radial. No caso das ondas eletromagnéticas emitidas por "fontes pontuais", essa simetria não ocorre pois os campos são transversos à direção de propagação, como se pode observar na Fig. 10.6. Na realidade não existem fontes de radiação pontuais, os dipolos sempre possuem uma dimensão espacial, emitindo radiação com uma certa dependência angular. No caso de outras fontes de radiação eletromagnética, como os corpos aquecidos, tal como uma fornalha ou mesmo o sol, elas são constituídas por um conjunto infinito de antenas dipolares cuja orientação é aleatória em função da agitação térmica.

10.4 Propriedades da Radiação Eletromagnética

As cargas elétricas em movimento produzem campos elétricos e magnéticos que diferem daqueles produzidos por cargas estáticas ou em movimento retilíneo uniforme. Quando uma carga é acelerada o campo elétrico não é mais radial apresentando uma forma semelhante ao da Fig. 10.8(a). Quando as cargas elétricas são desaceleradas também se produz radiação como é o caso da radiação de **bremstrahlung** responsável pela produção de raios-x nos tubos de Roentgen, exemplificados na Fig. 10.8(b).

10.4.1 Dispersão de Ondas Eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas se propagam em um meio material com velocidade diferente daquela no vácuo, pois mesmo que não existam cargas livres ou correntes elétricas ocorre a interação do campo magnético e elétrico com os elétrons atômicos e mesmo com o núcleo. Esta interação produz ondas secundárias ou dispersas que se sobrepõem às ondas originais. Os fenômenos de interação da radiação com a matéria são muito complexos e não podem ser generalizados de forma simples, mas considerando um meio material homogênea e isotrópico, pode-se mostrar o efeito da polarização e da magnetização do meio substituindo as constantes ε_0 e μ_0 , pelas respectivas constantes no meio

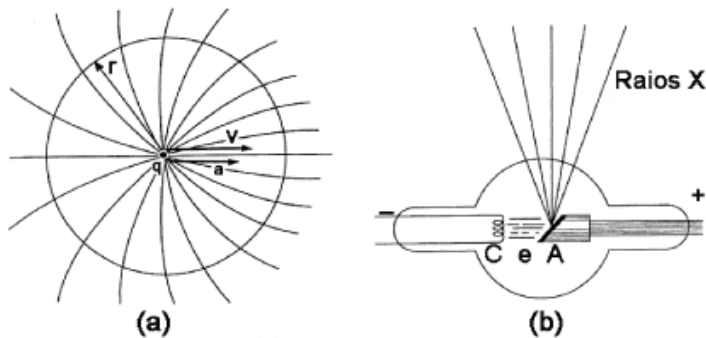


Figura 10.8: Emissão de ondas eletromagnéticas por cargas elétricas aceleradas: (a) campo elétrico produzido por cargas aceleradas linearmente; (b) produção de Raios X por desaceleração de elétrons, ou radiação de bremsstrahlung.

material, ϵ e μ , resultando assim na velocidade de propagação da onda, num meio material dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{10.74}$$

A relação entre a velocidade da luz e a velocidade de propagação num meio é denominado índice de refração, n , característico de cada substância:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \tag{10.75}$$

10.4.2 Polarização

Quando o campo elétrico ou o campo magnético oscila sempre numa direção definida diz-se que a onda está linearmente polarizada. Quando os vetores \vec{E} e \vec{B} giram uniformemente num plano diz-se que a polarização é circular. Uma forma muito simples de polarizar a radiação eletromagnética é fazê-la passar por um material que tenha índice de absorção dependente da direção. O exemplo mais simples deste tipo de material é o dos filmes polaróides, constituídos de moléculas muito longas e orientadas segundo uma dada direção. Também é possível polarizar no processo de reflexão pois para o chamado ângulo de Brewster, a onda refletida é polarizada. O ângulo de Brewster, θ_B , é dado por:

$$\tan \theta_B = n, \tag{10.76}$$

na qual n é o índice de refração do material.

10.4.3 Espectro de Radiação Eletromagnética

As ondas eletromagnéticas são emitidas num amplo intervalo de frequências, ou de comprimentos de onda, e são classificadas segundo alguns critérios, como por exemplo, pelo tipo de fonte ou pelo tipo de interação com a matéria. Como o comprimento de onda da radiação eletromagnética está diretamente relacionado com o tamanho das "antenas" (em geral dipolos de meio comprimento de onda) torna-se importante discutir fisicamente o tamanho das antenas emissoras no amplo espectro da radiação eletromagnética. Na Fig. 10.9 mostramos o espectro eletromagnético, com a escala de frequência e comprimento de onda, dos vários exemplos de bandas citadas. Na tabela 10.1, apresentam-se de forma mais detalhada as diversas bandas de ondas eletromagnéticas de uso corrente na ciência e tecnologia.

A seguir descreve-se de forma resumida a classificação, mais usual, dada ao espectro eletromagnético.

1. Rádio

Estas ondas utilizadas em sistemas de telecomunicações, para rádio, televisão são gerados por circuitos oscilantes com frequências de alguns Hz até $10^9 Hz$ ou de comprimento de onda variando de km até cm .

2. Microondas

O seu uso iniciou-se com os radares e outros sistemas de comunicação e hoje também se utilizam para o aquecimento de alimentos, ou mesmo industrial. O seu comprimento de onda varia de aproximadamente $30 cm$ a mm . As frequências desta banda vai de $10^9 Hz$ até $10^{11} Hz$. Esta região muitas vezes é chamada de UHF (Ultra High Frequency).

3. Infravermelho

Estas ondas podem ser produzidas por moléculas, corpos aquecidos etc. O comprimento de onda vai de mm até $7,8 \times 10^{-7} m$. O seu uso mais corrente, tanto domiciliar como industrial é para o aquecimento e secagem.

4. Luz Visível

A luz visível é produzida com comprimentos de onda entre 400 e $700 nm$ e é produzida por átomos moléculas como resultado do movimento dos elétrons. As cores características do espectro contínuo são produzidas pela sensibilidade do olho a cada comprimento de onda.

5. Ultravioleta

Esta região atinge, comprimentos de onda que vão de $380 nm$ até $0,6 nm$. Também são produzidos por átomos e moléculas excitadas. Cada vez o

ultravioleta apresenta maior utilidade prática, como no endurecimento de resinas, esterilização etc.

6. Raios X

O espectro de Raios X se situa de nm até $10^{-12} m$ e são produzidos nos tubos de raios catódicos onde ocorre a produção de radiação de frenamento (bremstrahlung), ou por transições atômicas. A utilização de raios-X, especialmente em técnicas de diagnóstico por imagens médicas, ou mesmo tratamento de câncer. Na indústria o seu uso é muito importante no controle de qualidade de peças soldadas e fundidas.

7. Radiação gama

Estas ondas são de origem nuclear e seu comprimento de onda vai do limite superior dos Raios X até à ordem de $10^{-14} m$. O seu uso é semelhante ao dos raios-X, mas devido ao seu menor comprimento de onda são mais penetrantes, e o seu uso denominado gamagrafia, permite a análise de imagens de peças de aço de dezenas de cm de espessura ou mesmo concreto de metros de espessura.

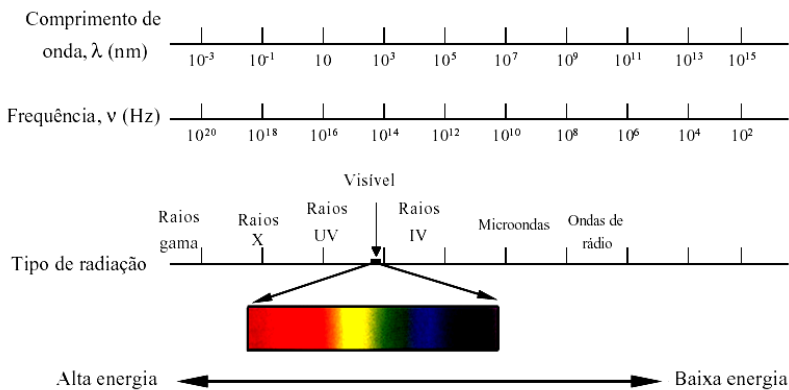


Figura 10.9: Espectro da radiação eletromagnética; adaptada da seguinte fonte: <http://penta3.ufrgs.br/CESTA/fisica/calor/espectroeletromagnetico.html>

Tabela 10.1: Ondas Eletromagnéticas: bandas de frequência e comprimento de onda

Designação	Limites de Frequência		e de comprimento de onda	
	inferior	superior	inferior	superior
ULF*		30Hz	10Mm	
VF*	30Hz	300Hz	1Mm	10Mm
ELF	300Hz	3kHz	100km	1Mm
VLF	3kHz	30kHz	10km	100km
LF	30kHz	300kHz	1km	10km
MF	300kHz	3MHz	100m	1km
HF	3MHz	30MHz	10m	100m
VHF	30MHz	300MHz	1m	10m
UHF	300MHz	3GHz	10 cm	1m
SHF†	3GHz	30GHz	1cm	10cm
S	2.6	3.95	7.6	11.5
G	3.95	5.85	5.1	7.6
J	5.3	8.2	3.7	5.7
H	7.05	10.0	3.0	4.25
X	8.2	12.4	2.4	3.7
M	10.0	15.0	2.0	3.0
P	12.4	18.0	1.67	2.4
K	18.0	26.5	1.1	1.67
R	26.5	40.0	0.75	1.1
EHF	30GHz	300GHz	1mm	1cm
Submilímetro	300GHz	3THz	100 μ m	1mm
Infravermelho	3THz	430THz	700 nm	100 μ m
Visível	430THz	750THz	400nm	700nm
Ultravioleta	750THz	30PHz	10nm	400nm
Raios-X	30PHz	3EHz	100pm	10nm
Raios Gama	3EHz			100pm

Fonte: NRL Plasma Formulary, www.psfc.mit.edu/, 8/09/2006.

* Os limites entre ULF e VF podem ter outros valores na literatura.

† A banda de microondas pode ser dividida em sub bandas S-R.

10.5 Aplicações Científicas e tecnológicas

Não é possível resumir todas as aplicações científicas e tecnológicas das ondas eletromagnéticas neste espaço reduzido, por isso optamos por descrever a blindagem eletromagnética e os efeitos das radiações eletromagnéticas, por ser esse um tema que deve preocupar todas as aplicações, em vista do seu uso crescente.

10.5.1 Blindagem Eletromagnética

A blindagem eletromagnética é uma necessidade moderna importante tanto sob o ponto de vista tecnológico, pois muitos equipamentos devem funcionar livres de campo magnético, como no caso das telecomunicações, ou da informática, como sob o ponto de vista dos efeitos biológicos sobre os seres vivos, onde o controle das ondas eletromagnéticas é cada vez mais necessário. A população é submetida a campos eletromagnéticos muito intensos na região de 60 Hz, cujo campo magnético pode atingir $0,1T$, tanto nas atividades domiciliares como mesmo no seu trabalho e cada vez mais as normas de proteção são mais exigentes para os limites de campo eletromagnético, assunto que será tratado na seção 10.5.3.

Existem vários tipos de blindagens magnéticas; primeiro aquelas nas quais o fluxo de campo magnético é limitado por materiais ferromagnéticos, tais como o metal μ , constituído por 80% *Ni* e 20% de *Fe*. Nesse caso se constrói um envoltório desse metal sobre a fonte de campo magnético, uma gaiola. As linhas de campo magnético são então desviadas para dentro desses materiais, evitando que elas passem ao espaço externo.

Outro tipo de blindagem, é produzido por materiais onde as perdas por correntes parasitas (Correntes de Foucault) são muito intensas, ou seja materiais altamente condutores, como o cobre o alumínio e aços especiais, cujo princípio descrito na seção 8.6.1 destas notas, é baseado na indução magnética. No interior de um material condutor, sujeito a um campo magnético variável no tempo, produzem-se correntes parasitas induzidas, que se opõem à variação do campo magnético e dessa maneira produz-se o efeito de blindagem.

A utilização de supercondutores como blindagem magnética, é uma das possibilidades mais interessante para a utilização destes materiais. Os supercondutores atuam como substâncias diamagnéticas perfeitas, como mostra a Fig. 9.4, expulsando as linhas de campo magnético, num fenômeno conhecido como efeito Meissner.

O fator de blindagem para qualquer um desses métodos, ou seja a relação entre o campo externo e o campo depois dentro da blindagem, depende de muitos fatores, entre eles a frequência do campo, o tipo de geometria e dos materiais utilizados.

10.5.2 Experimento de Hertz

A forma mais simples de uma antena dipolar de radiação eletromagnética, foi baseada nos resultados experimentais de Hertz em 1887, comprovando a existência de ondas eletromagnéticas. A Fig. 10.10 nos mostra um esquema do experimento de Hertz, uma antena elétrica dipolar que está ligada a um oscilador LC ressonante. O receptor também é uma antena dipolar, neste caso magnética. As ondas eletromagnéticas, neste experimento, são observadas numa antena receptora através da produção de uma faísca induzida. Hertz observou que para cada faísca na antena emissora, ocorria uma faísca na antena receptora. Através da medida do comprimento de onda e da frequência, Hertz pode calcular o valor da velocidade da luz, c .

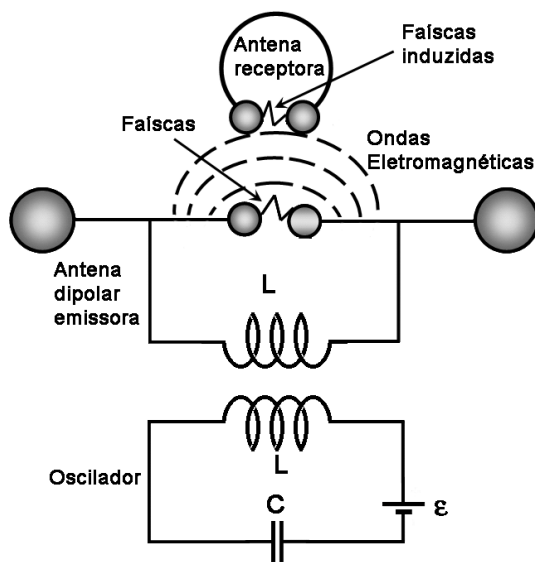


Figura 10.10: Oscilador de Hertz para detecção de ondas eletromagnéticas.

10.5.3 Efeitos da Exposição a Campos Eletromagnéticos

A preocupação crescente com os possíveis efeitos dos campos eletromagnéticos tanto aos trabalhadores como à população em geral tem se tornado relevante para todos os organismos nacionais e internacionais preocupados com as políticas de saúde pública tendo em vista o crescente uso amplo da eletricidade, das telecomunicações dos Raios X, e de outras formas de radiação

eletromagnética, tanto **ionizantes** como **não ionizantes**. As chamadas radiações ionizantes são aquelas cuja energia é suficiente para arrancar elétrons da matéria, produzindo ions livres. No ar a energia média para formar um par de ions é da ordem de $13,4\text{eV}$ ($1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{joules}$). As radiações eletromagnéticas, com comprimento de onda menor do que 200nm são consideradas não ionizantes compreendendo, entre outras, parte da radiação ultravioleta, luz visível, infravermelho, microondas e radiofrequência.

Excitação e Ionização

A energia depositada pela radiação ionizante ao atravessar um dado meio material segue vários mecanismos e eventualmente essa energia também é dissipada em calor. Podemos entender melhor esses diferentes mecanismos, sabendo que eles resultam da **ionização** e ou da **excitação** dos átomos ou moléculas do material absorvedor. A ionização resulta da remoção de elétrons orbitais de um átomo ou molécula, criando um ion positivo. A energia da radiação causadora de ionização deve ser no mínimo igual à função trabalho da substância, ou seja a energia de ligação média do elétron. O processo de ionização pode produzir a dissociação molecular por consequência do arrancamento do elétron orbital e formação de radicais livres. A radiação eletromagnética, dita ionizante, é dividida em raios-X, radiação gama e parte do UV C.

Efeitos Biológicos das Radiações Ionizantes

As radiações ionizantes produzem alterações no material celular, que segundo a dose podem produzir alterações no seu funcionamento e também a sua morte. Existem dois mecanismos principais pelos quais a radiação afeta as células, o primeiro é chamado efeito direto ou seja, o efeito ionizante da radiação que faz com que as moléculas se rompam formando ions livres. O segundo efeito, ou efeito secundário, ainda devido ao poder ionizante, produz novas substâncias químicas, a partir por exemplo dos radicais livres Oxi (O) e Hidroxila (OH). Os dois efeitos são fundamentalmente efeitos de natureza química. Os efeitos biológicos da radiação não são, portanto, diferentes dos efeitos de outras substâncias químicas. A radiação pode então ser vista como o agente capaz de produzir compostos químicos danosos às células. O dano resultante depende do número de células atingidas e das transformações celulares produzidas.

Por outro lado, dano produzido nos seres vivos está diretamente associado à energia depositada, *joule/kg* ou *Sievert*, chamada de dose. Para doses muito altas, a relação dose dano é bem conhecida e portanto podem-se prever os seus efeitos. Para doses muito baixas e crônicas, a relação dose-

dano possui uma incerteza associada muito grande tornando-se impossível discrimina-la dos efeitos de outros agentes físicos químicos ou biológicos.

Radiações Não Ionizantes

As radiações não ionizantes incluem o ultravioleta A, B e parte do C, o visível, infravermelho, microondas, radiofrequência e campos magnéticos e elétricos estáticos. Os campos eletromagnéticos dessas radiações interagem diretamente de duas maneiras; a primeira é devida às forças exercidas sobre as cargas elétricas, tanto atrativas como repulsivas, alterando a distribuição de cargas elétricas nos materiais; a segunda envolve a criação de campos elétricos e magnéticos adicionais pela redistribuição de cargas elétricas. Os efeitos Biológicos da radiação eletromagnética, não ionizante dividem-se em **efeitos térmicos** e **não-térmicos**.

- **Efeitos térmicos** Os efeitos térmicos por absorção de ondas eletromagnéticas são todos aqueles processos que produzam um aumento de temperatura nos tecidos.
- **Efeitos não-térmicos**

Os efeitos "não-térmicos" são os efeitos bioquímicos ou eletrofísicos causados diretamente pelos campos eletromagnéticos induzidos, sem um aumento localizado ou distribuído de temperatura. Efeitos que foram claramente demonstrados incluem a alteração no fluxo de ions através das membranas das células afetando particularmente as propriedades eletro-fisiológicas das células nervosas, alteração da mobilidade dos ions de cálcio (particularmente nos tecidos do cérebro), alterações na síntese do DNA e na transcrição de RNA e efeitos na resposta de células normais a moléculas sinalizadoras (incluindo hormônios, neurotransmissores e fatores de crescimento).

Nenhuma pesquisa apresentou dados conclusivos para provar que baixos níveis de radiação eletromagnética não ionizante causam efeitos adversos à saúde mas muitas autoridades médicas indicam ser prudente evitar a exposição desnecessária mesmo para energia eletromagnética moderada ou de alto nível até que se tenha mais conhecimento sobre o assunto.

Dosimetria da Radiação não Ionizante

De forma geral pode-se dizer que os efeitos da radiação não-ionizante sobre os seres vivos dividem-se em duas categorias, os efeitos térmicos e os não térmicos também chamados efeitos biológicos.

Além das grandezas características do campo eletromagnético ou seja os campos elétrico, magnético e densidade de energia, temos as unidades das dosimétricas, especificamente relacionadas com efeitos físicos e biológicos.

Uma das grandezas físicas de maior interesse na qualificação de limites de exposição às radiações eletromagnéticas é a Taxa de Absorção Específica, *SAR* (Specific Absorption Rate). Essa grandeza é aceita como unidade dosimétrica do nível de energia absorvida por unidade de massa do corpo, quando este corpo está submetido a uma radiação de onda eletromagnéticas, especialmente na região RF. Quanto aos efeitos não térmicos, ou biológicos, eles podem ser avaliados a partir do valor das correntes induzidas, cujo valor está relacionado ao campo elétrico induzido que, por sua vez também está relacionado com a variação temporal do fluxo magnético. Um exemplo dessas correntes podem ser observadas na Fig. 10.11(a), na qual quando o corpo humano é submetido a radiação eletromagnética de baixa frequência comporta-se como um bom condutor. Os campos elétricos externos induzem cargas elétricas na sua superfície e dessa maneira a variação temporal dessa carga superficial produz densidade de corrente no volume do corpo. Na Fig. 10.11(b) pode se observar o efeito das correntes produzidas por campos magnéticos variáveis no tempo que interagem com o corpo humano resultado das correntes previstas pela lei de Faraday. O valor das dimensões dos percursos de corrente no corpo dependem do valor da frequência do campo magnético por outro lado o valor das correntes depende da condutividade dos tecidos e como o corpo não é eletricamente homogêneo o cálculo das correntes só pode ser feito utilizando modelos (fantomas) realísticos do corpo. c

As grandezas dosimétricas devem correlacionar a intensidade dos campos com os efeitos sobre os organismos vivos. As grandezas padrão mais utilizadas são a densidade de corrente induzida \vec{j} [A/m^2], nos tecidos e *SAR* [W/kg]. A densidade de corrente é utilizada para frequências de campo eletromagnético baixo de $100kHz$ e *SAR* acima de $10MHz$, entre $100kHz$ e $10MHz$ se utilizam as duas grandezas.

A densidade de corrente é proporcional ao vetor campo elétrico \vec{E} [V/m],

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (10.77)$$

O *SAR* é diretamente proporcional ao quadrado da densidade de corrente:

$$SAR = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma \rho} = \frac{\sigma |\vec{E}|^2}{\rho}, \quad (10.78)$$

na qual σ [A/Vm] e ρ [kg/m^3], são respectivamente a condutividade elétrica e densidade de massa do material biológico.

Os valores limites destas grandezas são definidos pela ICNIRP (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection)²

²International Commission on Non Ionizing Radiation Protection. Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic and electromagnetic fields (up to 300 GHz).

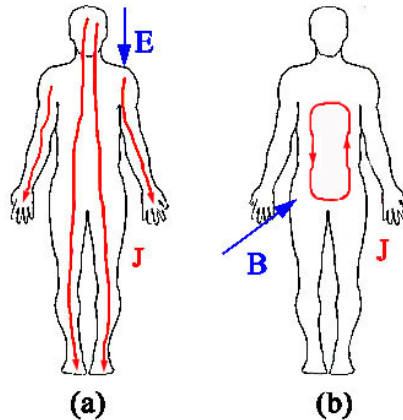


Figura 10.11: Acoplamento entre os campos eletromagnéticos e o ser humano, (a) Corrente induzida pelo campo elétrico vertical; (b) Corrente induzida pelo campo magnético variável

O valor de SAR é um parâmetro que quantifica a potência absorvida por unidade de massa nos tecidos e depende da densidade de potência da radiação eletromagnética e das características do tecido onde a radiação incide. Desta forma, indicando a energia aplicada e o aumento de temperatura em qualquer parte do corpo.

A variação de potência, dP/dm , poderá ser escrita como

$$SAR = \frac{dP}{dm} = c_p \frac{dT}{dt}, \quad (10.79)$$

na qual c_p é o calor específico e T a temperatura. Deste modo o valor de SAR pode ser interpretado com proporcional à taxa de variação temporal da temperatura. Esta expressão na Eq. 10.79 permite avaliar o valor instantâneo do SAR para exposições em pequenos intervalos de tempo, nos quais é possível considerar uma variação linear de temperatura.

10.6 Questões, Exercícios e Problemas

1. Escreva as expressões das equações de Maxwell na sua forma integral e diferencia e descreva o significado de cada uma delas.
2. A partir das equações de Maxwell; obtenha a equações de onda para o campo elétrico e campo magnético;
3. Obtenha e interprete a equação da continuidade e interprete com ela expressa o princípio da conservação da carga.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

4. Sendo $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ o vetor de Poynting e u a densidade de energia, discuta o significado físico de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}.$$

5. Considere uma onda eletromagnética progressiva dada por

$$\vec{E} = E_m \text{sen}(kx - \omega t) \hat{j}; \quad \vec{B} = B_m \text{sen}(kx - \omega t) \hat{k}$$

e mostre que a equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ é satisfeita para $E_m/B_m = c$.

6. Mostre que $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ é solução da equação de onda para o campo elétrico, em um meio com constante dielétrica κ , para $\sqrt{\kappa} \equiv c/v$.
7. Uma onda eletromagnética possui uma intensidade de 50 W/m^2 , a) calcule o valor da pressão de radiação, b) determine os valores do campo elétrico e magnético médio.
8. Para um campo eletromagnético que possui as seguintes características, $E_y = E_0 \cos(kz + \omega t)$, $E_x = 0$, $E_z = 0$, obtenha as componentes do campo magnético e demonstre qual é a direção de propagação da onda eletromagnética.
9. Um feixe de LASER, emite fótons com uma intensidade de 10^{14} W/m^2 com uma área transversal de 1 mm^2 . Qual seria a força que a radiação exerceria sobre um objeto perfeitamente absorvedor.
10. A taxa de emissão de energia do sol é de $3,8 \times 10^{26} \text{ W}$. Calcule o valor do vetor de Poynting na superfície da terra.
11. Considerando que a medida dosimétrica das radiações não ionizantes é o **SAR**, tente demonstrar a relação da unidade como o vetor de Poynting.

Circuitos Elétricos de Corrente Contínua

Gustav Robert Kirchhoff, cientista russo, aluno de Gauss trabalhou nos fundamentos da mecânica quântica e as suas regras para solucionar os circuitos elétricos publicadas em 1854 são o resultado do trabalho de **Georg Simon Ohm**...

11.1 Introdução

Neste capítulo estudam-se os circuitos elétricos de corrente contínua do tipo R, RC, RL, LC e RLC como elementos passivos alimentados por fontes de corrente contínua como elementos ativos. É conveniente lembrar que a forma de representar esses circuitos é uma forma idealizada em que uma resistência, um capacitor ou um indutor e a fonte de CC são representados por símbolos adequados conectados por linhas cuja função é ligar pontos de mesmo potencial elétrico. Esses símbolos representam as propriedades elétricas de um circuito, ou seja resistência, capacitância e indutância.

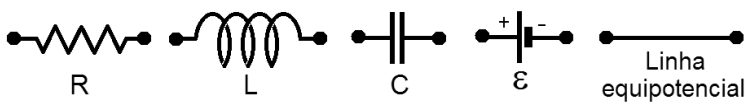


Figura 11.1: Símbolos dos elementos básicos de um circuito elétrico.

Deve-se lembrar, também, que os circuitos elétricos apresentam dois tipos de comportamento: o primeiro dito **transitório ou transiente** que ocorre imediatamente ao serem ligadas ou desligadas as fontes e outro permanente que ocorre após o transitório ter passado. Um exemplo simples do comportamento transitório e permanente é o caso do circuito com um capacitor, cujo estado inicial seja de carga nula, que ao ser ligado a uma fonte adquire carga lentamente até atingir uma carga máxima. A esse período da carga do capacitor chama-se de regime transitório e depois de atingir o equilíbrio de carga, tanto na carga como na descarga, atinge o regime permanente.

Os circuitos elementares são compostos de resistências R , capacitores C , indutores L e fontes de corrente contínua com força eletromotriz ϵ . O gerador a bateria ou pilha são denominados genericamente por *fem* e são sempre os responsáveis pelo fornecimento de energia. Na resistência ocorre a dissipação de energia sob a forma de calor, em função da corrente que circula. No capacitor a energia do campo elétrico aumenta ou diminui dependendo se o capacitor estiver carregando ou descarregando. Na indutância a energia é armazenada, sob a forma de campo magnético e também aumenta ou diminui quando a corrente induzida aumenta ou diminui. A tabela.11.1 nos mostra os valores das chamadas quedas ou ganhos de potencial em cada um dos elementos do circuito.

Tabela 11.1: Características de Potencial e Potência nos elementos R, L e C.

Característica	resistor	capacitor	indutor
V	RI	$\frac{Q}{C}$	$L \frac{dI}{dt}$
$P = VI$	RI^2	$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt}$	$LI \frac{dI}{dt}$

11.2 Solução de Circuitos CC

As ferramentas fundamentais que permitem a solução de circuitos simples são a solução de:

- **Princípio da superposição:** que é aplicável a circuitos que só contenham elementos lineares, tais como capacitores, resistências e fontes dependentes ou independentes; permitindo definir uma relação linear entre a tensão e a corrente.
- **Regras de Kirchhoff;** também conhecidas como leis dos nós e das malhas, correspondendo, respectivamente, à aplicação dos princípios de conservação da carga elétrica e da energia.

- **Teoremas de Thévenin e Norton;** que permitem encontrar circuitos equivalentes muito simples.

11.2.1 Circuitos Equivalentes

Dois circuitos elétricos contendo resistências e capacitores são equivalentes: quando para uma mesma diferença de potencial aplicada aos mesmos a corrente total é a mesma. O exemplo mais simples de circuitos equivalentes está relacionado com os circuitos série, em que, simplesmente, a ordem dos mesmos elementos é diferente, como os mostrados na Fig. 11.2.



Figura 11.2: Circuitos série equivalentes: os circuitos (a) e (b), são equivalentes, pois a troca da ordem dos componentes, não altera a corrente a corrente, e tensão.

Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton

Em muitos casos existe a necessidade de determinar a tensão, corrente e potência em apenas um ramo de um circuito muito complexo. Os Teoremas de Thévenin e Norton permitem que seja determinado um circuito equivalente simples a partir de dois terminais a-b como no caso da Fig.11.3(a), o qual pode substituir uma rede complexa e simplificar a resolução. Para isso a equivalência de circuitos, de maior complexidade, pode ser estudada em termos de dois teoremas, o de Thévenin e o de Norton, que resultam em circuitos equivalentes com fonte de tensão Fig. 11.3(b) ou de corrente, conforme Fig. 11.3 (c).

Estes dois teoremas apresentados respectivamente por M.L.Thévenin em 1883 e E.L. Norton em 1926, demonstram que qualquer circuito bipolar linear é equivalente a uma fonte de tensão e uma resistência em série ou a uma fonte de corrente e uma resistência em paralelo. A determinação das características dos circuitos equivalentes de Thévenin e Norton deve ser feita diferenciando três diferentes formas:

- Quando o circuito contiver fontes independentes, as fontes devem ser retiradas e a resistência é calculada ou medida a partir dos terminais a partir dos quais se deseja obter o circuito equivalente, na Fig.11.3 os terminais a-b.

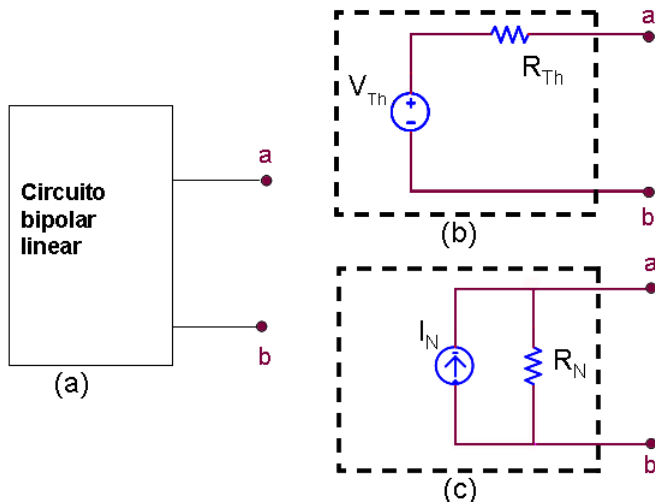


Figura 11.3: (a) circuito bipolar original; (b) circuito equivalente de Thévenin; (c) circuito equivalente de Norton)

- b) No caso do circuito original conter fontes independentes e controladas, a resistência equivalente é obtida a partir da corrente de curto circuito, ou corrente de Norton I_N , e da tensão de Thévenin, ou tensão de circuito aberto, e dessa forma se obtém a relação:

$$R_{Th} = R_N = \frac{V_{Th}}{I_N}.$$

- c) Quando além de resistências o circuito só contiver fontes controladas deve-se aplicar uma fonte de corrente aos terminais a-b, medindo-se a tensão de Thévenin. O inverso também é possível, aplicando uma fonte de tensão e medindo a corrente de Norton.

Esses dois circuitos equivalentes, de Thévenin e Norton também são equivalentes entre si e podem ser construídos de forma muito simples bastando definir as fontes e as resistências. A tensão de Thévenin V_{Th} , pode ser obtida medindo a tensão, a circuito aberto (sem carga), entre os terminais a e b do circuito original, portanto:

$$V_{ab} = V_{Th}$$

O valor da resistência R_{Th} , do circuito equivalente de Thévenin, é definido como a resistência equivalente do circuito, sem fontes. No caso do circuito

equivalente de Norton pode-se provar que:

$$V_N = V_{Th}; \quad V_N = V_{Th}.$$

Ao medir a corrente de curto circuito determina-se a corrente I_N , portanto pode-se resumir as propriedades dos dois circuitos equivalentes através da relação entre a medida da tensão a circuito aberto V_{oc} e a medida da corrente a curto circuito I_{sc}

$$V_{Th} = I_N R_N \quad R_N = R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \quad (11.1)$$

Essa equivalência entre os circuitos de Thévenin e Norton pode ser entendida como uma transformação de fontes, ferramenta útil para simplificar os circuitos, substituindo uma fonte de tensão em série com uma resistência por uma fonte de corrente com uma resistência em paralelo e vice versa.

Utilizando essa equivalência de circuitos é possível voltar ao problema de máxima transferência de potência tal como deduzido no Capítulo 5, Eq. 5.25, considerando que a resistência interna da fonte é a resistência de Thévenin, portanto podemos considerar que quando a resistência de carga $R = R_{Th}$ teremos a máxima transferência de potência, como pode observar no gráfico da Fig. 5.6.

Associação de Resistências e Capacitores

- Associação em série

Quando as resistências de um circuito: estão ligadas em série, a corrente que circula nas resistências é a mesma para todas as resistências. No caso dos capacitores em série a carga em todas as placas é a mesma, conforme mostra a Fig. 11.4.

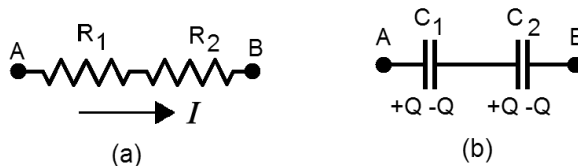


Figura 11.4: Circuitos de resistências e capacitores em série.

Como a corrente é idêntica nas resistências em série, pode-se escrever a diferença de potencial entre os terminais A e B

$$V_{AB} = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = IR_{eq}. \quad (11.2)$$

A resistência equivalente de uma associação em série de resistências será o somatório das mesmas

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (11.3)$$

No caso de capacitores em série, pode-se dizer que, a diferença de potencial seja dada por

$$V_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_{eq}}. \quad (11.4)$$

Portanto, o inverso da capacitância equivalente será a soma dos inversos das capacitâncias em série. Para n capacitores em série a capacitância equivalente vale

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (11.5)$$

• Associação em paralelo

Quando a associação de resistências: for em paralelo, como na Fig. 11.5, com a fonte, a diferença de potencial aplicada é a mesma para todas as resistências.

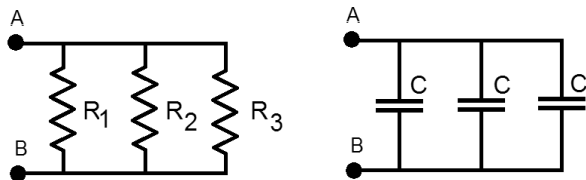


Figura 11.5: Circuitos de resistências e capacitores em paralelo.

A corrente elétrica total será a soma das correntes, que circulam em cada resistência:

$$I_{eq} = \sum_{i=1}^n I_i = V_{AB} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (11.6)$$

e então a resistência equivalente será dada por,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (11.7)$$

Para os capacitores em paralelo, conforme a Fig. 11.5, a diferença de potencial aplicada a todos os capacitores será a mesma e idêntica à da fonte. A carga total será a soma das cargas armazenadas em cada capacitor,

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = V_{AB} \sum_{i=1}^n C_i \quad (11.8)$$

portanto, a capacitância equivalente será a soma das capacitâncias dos n capacitores:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (11.9)$$

11.2.2 Regras de Kirchhoff.

Regra das Malhas

Para exemplificar a aplicação da regra das malhas, utiliza-se um circuito simples como o da Fig. 11.6. Considerando que no circuito não existe um campo magnético, ou seja $B = 0$, pode-se dizer que o campo elétrico ao longo do circuito tem a seguinte propriedade; toda a energia produzida pela *fem* é transformada em calor nas resistências o que pode ser traduzido pela seguinte equação:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (11.10)$$

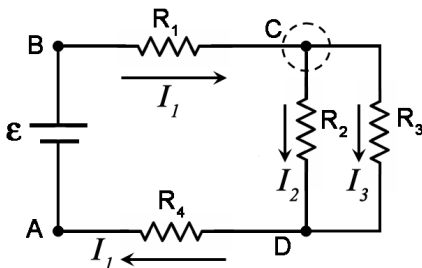


Figura 11.6: Circuito unicamente resistivo com uma fem.

Pode-se entender esta equação como sendo o trabalho por unidade de carga em cada um dos trechos que contém força eletromotriz ou qualquer outro

elemento passivo. Aplicando a integral de circulação à força eletromotriz e à resistência equivalente R_{eq} , resulta que

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon_{eq}, \quad (11.11)$$

$$\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = R_{eq}I. \quad (11.12)$$

As equações 11.11 e 11.12 representam as quedas de tensão entre os trechos $A - B$ e $B - A$ respectivamente. A equação 11.10 diz que a soma das quedas de tensão ao longo de toda a circulação C (todo o circuito) é nula. Esta é uma aplicação do princípio de conservação da energia e se denomina **regra de Kirchhoff para as malhas**, ou seja

$$\epsilon - R_{eq}I = 0, \quad (11.13)$$

em que R_{eq} é a resistência equivalente do circuito, cujo valor deve ser definido a partir da solução do circuito equivalente a uma única resistência ou equivalente de Norton na qual circula a corrente

$$I = \frac{\epsilon}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}. \quad (11.14)$$

Regra dos Nós

O princípio de conservação da carga elétrica nos permite aplicar a *regra de Kirchhoff dos nós* a qualquer um dos nós do circuito da Fig. 11.6. Os nós são pontos aos quais convergem várias linhas de mesmo potencial, percorridas por diferentes correntes, como é o caso dos pontos C e D . Considerando uma superfície fechada que envolva um desses nós, C ou D , pode-se aplicar o princípio de conservação de carga, levando em conta que nenhum dos nós, por hipótese, é uma fonte ou um sorvedouro de carga:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^n I_n. \quad (11.15)$$

Desse modo pode-se dizer que a soma algébrica das correntes, que entram ou saem do nó considerado, é nula (as correntes que entram consideradas como positivas e negativas as que saem);

$$\oint_A \vec{J} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n I_n. \quad (11.16)$$

A aplicação dessa regra ao nó C , resulta em: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Solução de um Circuito

As duas regras de Kirchhoff: permitem a solução de qualquer circuito com resistências, capacitores e fontes. Por solução, do circuito entende-se a utilização dessas regras para calcular o valor das correntes ou cargas armazenadas em qualquer elemento do circuito. Nestas notas aplicam-se dois métodos, que em si utilizam as regras dos nós e das malhas. O primeiro de forma explícita, e o segundo, também chamado método das malhas, une a regra das malhas e dos nós.

No método explícito são atribuídas, de forma arbitrária, o sentido das correntes em cada elemento do circuito. A definição só será feita após obtida a solução na qual se faz a determinação do sentido real. Nesse método o número de equações, necessárias, é igual ao de correntes incógnitas. Em geral se utilizam $(N - 1)$ equações para os nós e $(n - 1)$ para as malhas, onde N é o número de nós e n o número de malhas.

No método das malhas, as correntes são correntes parciais para cada malha, como se as malhas fossem independentes portanto, na solução não aparece a regra dos nós que ficará implícita. Neste caso o número de equações será idêntico ao número de malhas.

Exemplo 11.1

Aplicação das Regras de Kirchhoff ao circuito da Fig. 11.6.

Solução

O circuito da Fig. 11.6 é muito simples e facilmente redutível a uma única malha, considerando a associação das resistências equivalentes entanto, vamos utilizá-lo para exemplificar as regras de Kirchhoff. R_2 e R_3 , em uma única equivalente.

Para o nó C, $I_1 = I_2 + I_3$.

Considerando a malha $A - B - C - D$ e aplicando a regra das malhas, resulta que

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0,$$

cuja soma de quedas de potencial vale

$$\epsilon - R_1 I - R_2 I_2 - R_4 I = 0.$$

Estritamente falando, sem lembrar da associação em paralelo, existem três correntes, portanto são necessárias três equações. Pode-se, então, escrever uma equação para a malha mais externa e outra para um dos nós, portanto

$$\epsilon - R_1(I_2 + I_3) - R_2 I_2 - R_4(I_2 + I_3) = 0,$$

$$\epsilon - R_1(I_2 + I_3) - R_3 I_3 - R_4(I_2 + I_3) = 0.$$

Resultando em $R_3 I_3 = R_2 I_2$, como seria de esperar pois as quedas de potencial nas resistências R_2 e R_3 são idênticas.

Exemplo 11.2

Solução do circuito resistivo da figura 11.7, utilizando as regras de Kirchoff.

Solução

Neste exemplo aplicam-se as regras de Kirchoff, separadamente, considerando correntes hipotéticas, como se fosse conhecida a solução. No circuito da Fig. 11.7, foram desenhadas arbitrariamente as correntes e também foi escolhida, arbitrariamente, a direção horária para percorrer as malhas e somar os potenciais.

Atenção! Para escrever a regra das malhas, deve-se, além de escolher um sentido arbitrário para as três correntes, definir o percurso para somar os potenciais em cada malha.

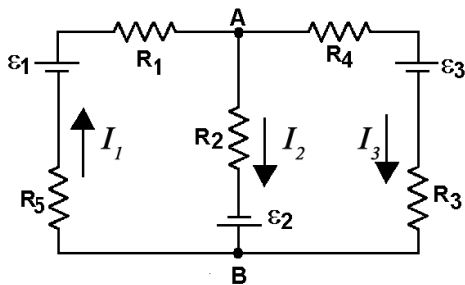


Figura 11.7: Circuitos de resistências para o exercício 6.4.

Aplicando a regra dos nós ao nó A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

e aplicando a regra das malhas à malha da esquerda e à mais externa;

$$\epsilon_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 + \epsilon_2 - I_1 R_5 = 0;$$

$$\epsilon_1 - I_1 R_1 - I_3 R_4 - \epsilon_3 - I_3 R_3 - I_1 R_5 = 0.$$

As três equações, uma dos nós e duas de malhas, constituem um sistema de equações que pode ser resumido da seguinte forma matricial:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ (R_1 + R_5) & R_2 & 0 \\ (R_1 + R_5) & 0 & (R_4 + R_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon_1 - \epsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (11.17)$$

A solução do sistema 11.17 resultará no valor do vetor das correntes e um ótimo exercício é escolher um outro nó; por exemplo, o nó B , e escrever o sistema de equações escolhendo o sentido anti-horário para as equações das malhas podendo, inclusive, escolher outro conjunto de malhas e chegando ao mesmo resultado.

No apêndice, apresenta-se a regra de Cramer para solucionar sistemas de equações como o deste problema.

Exemplo 11.3

Cálculo a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito 11.8 aplicando a regra das malhas utilizando o teorema de Thévenin.

Solução

O teorema de Thévenin indica que se pode encontrar a resistência equivalente, através da expressão

$$R_{eq} = \frac{\epsilon}{I_1} \quad (11.18)$$

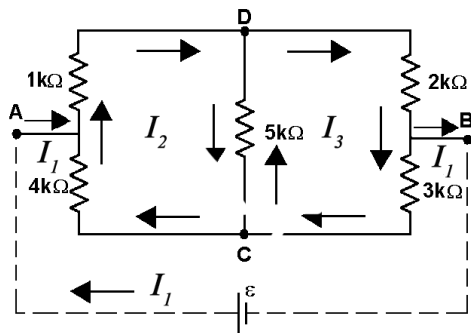


Figura 11.8: Circuito unicamente resistivo para determinação da resistência equivalente. A fonte ϵ foi colocada para solucionar pelo método das malhas e as correntes são parciais e circulam em cada malha como se fossem independentes.

O problema então se resume em encontrar a corrente I_1 e para isso pode-se supor que colocando-se uma fem, entre os pontos $A - B$, pode-se encontrar essa corrente, como se pode ver na Fig. 11.8, em que a linha tracejada foi adicionada ao circuito com uma fonte de valor não definido ϵ .

Escolhem-se as correntes, como as indicadas como se fossem independentes umas das outras, em cada malha. Aplicando a regra das malhas,

pode-se escrever para a malha $A - C - B - \epsilon$ que

$$4I_1 + 3I - 4I_2 - 3I_3 = \epsilon,$$

Para a malha da esquerda, percorrida pela corrente I_2 ,

$$-4I_1 + 4I_2 + 1I_2 + 5I_2 - 5I_3 = 0,$$

e para a malha da direita, percorrida pela corrente I_3 ,

$$2I_3 + 3I_3 - 3I_1 + 5I_3 - 5I_2 = 0.$$

Colocando estas equações, na forma matricial e como os valores das resistências são em $k\Omega$, dividindo a fem por 1000, resulta em

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 10 & -5 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon/1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O valor da corrente total I_1 , será calculado pela regra de Cramer obtendo-se

$$I_1 = \begin{bmatrix} 6\epsilon/1000 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -4 & 10 & -5 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{75}{295} \right) \frac{\epsilon}{1000}.$$

O que resulta em $R_{eq} = \frac{\epsilon}{I_1} = 3,93 k\Omega$.

Exemplo 11.4

Cálculo do valor da capacitância equivalente entre os pontos $A - B$ no circuito 11.9, aplicando a regra das malhas.

Solução

A associação de capacitores é um dos exemplos mais interessantes de aplicação da regra das malhas, que pode ser encontrado em vários textos. A ideia foi a mesma do problema anterior, adiciona-se uma fem hipotética para aplicar a lei das malhas, carregando os capacitores, colocam-se cargas independentes em cada malha. A soma de potenciais de cada capacitor será sempre nula ao percorrer cada uma das malhas.

Para a malha $A - C_1 - C_2 - B - \epsilon$ a soma dos potenciais será dada por

$$\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_1} + \frac{Q_1}{C_2} - \frac{Q_3}{C_2} = \epsilon.$$

Para a malha $C_5 - C_3 - C_2$ será

$$\frac{Q_3}{C_5} - \frac{Q_2}{C_5} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_3}{C_2} - \frac{Q_1}{C_2} = 0$$

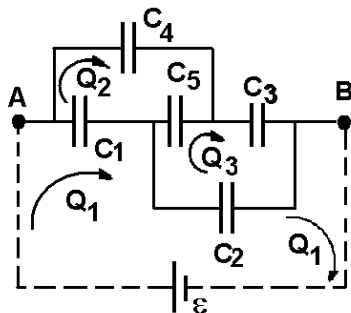


Figura 11.9: Circuito com associação de capacitores série e paralelo.

e para a malha $C_4 - C_5 - C_1$,

$$\frac{Q_2}{C_4} + \frac{Q_2}{C_5} + \frac{Q_2}{C_1} - \frac{Q_1}{C_1} = 0.$$

O sistema de equações das malhas será então

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}) & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_5} & (\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_2}) \\ -\frac{1}{C_1} & (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_5}) & -\frac{1}{C_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a regra de Cramer é possível obter cada uma das cargas:

$$Q_1 = \frac{\begin{bmatrix} \epsilon & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_3} \\ 0 & -\frac{1}{C_5} & (\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_2}) \\ 0 & (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_5}) & -\frac{1}{C_5} \end{bmatrix}}{\Delta a};$$

$$Q_2 = \frac{\begin{bmatrix} (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}) & \epsilon & \frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_5} & 0 + \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_5} \end{bmatrix}}{\Delta a};$$

$$Q_3 = \frac{\begin{bmatrix} (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}) & -\frac{1}{C_1} & \epsilon \\ -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_5} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_5}) & 0 \end{bmatrix}}{\Delta a}.$$

A solução deste sistema permite obter a capacitância equivalente, pois

$$C_{eq} = \frac{Q_1}{\epsilon}.$$

11.3 Circuito RC: carga e descarga do capacitor

O exemplo mais simples de um circuito contendo resistores e capacitores é o da Fig. 11.10, ou circuito RC série. Como os capacitores possuem uma resistência praticamente nula, devem ser sempre associados a um resistor, que terá a função de limitar a corrente na carga e descarga do capacitor.

A carga do capacitor é feita por uma fem, colocada em série com o capacitor e resistor através da chave S na posição 1. O processo de carga do capacitor ocorre até que o potencial do capacitor seja igual ao da fem. Ao atingir a carga de saturação a chave S é colocada na posição 2 e a partir daí o campo elétrico do capacitor suprirá a energia a ser dissipada no resistor até concluir a descarga completa.

Considerando um circuito RC como o da Fig. 11.10 em que tanto a fonte de força eletromotriz ϵ , como o resistor com a resistência R , estão ligadas em série com o capacitor C . Com a chave S na posição 1 se fará a carga e na posição 2 a descarga.

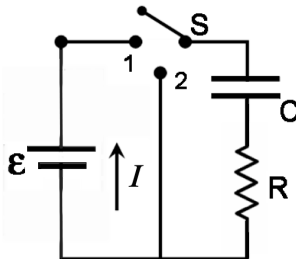


Figura 11.10: Circuito RC, para estudo da carga e descarga de um capacitor.

No instante $t = 0$ a chave S é ligada à posição 1 e o capacitor inicia o processo de carga. Depois de um longo tempo verifica-se que a carga atinge o equilíbrio. Ao deslocar a chave para a posição 2, a corrente se inverte e a carga existente no capacitor diminui gradualmente, aquecendo o resistor, até que um novo de equilíbrio é atingido agora com carga nula no capacitor. Os períodos de carga e descarga chamam-se transientes ou transitórios. A regra das malhas pode ser escrita para a malha na posição 1, de carga do capacitor:

$$\epsilon - RI - \frac{Q}{C} = 0. \quad (11.19)$$

Na Eq. 11.19 existem duas variáveis, a carga e a corrente, ambas dependentes do tempo e relacionadas da seguinte forma:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (11.20)$$

$$Q = \int I dt. \quad (11.21)$$

Escolhendo-se a variável carga para escrever a equação 11.19 na forma diferencial, chega-se a:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\epsilon}{R}. \quad (11.22)$$

Cuja solução pode ser obtida de forma muito simples desde que se definam as condições iniciais.

Descarga do capacitor.

Primeiro vamos solucionar o caso em que a *fem* é nula; para isso é necessário considerar que o capacitor está inicialmente carregado com uma carga elétrica igual a Q_o , portanto estuda-se a descarga do capacitor. As condições iniciais serão então para $t = 0$, $Q = Q_o$ e $\epsilon = 0$. Para tal deixa-se carregar o capacitor por um longo período e após coloca-se a chave na posição 2. A equação 11.22 tomará a seguinte forma,

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0. \quad (11.23)$$

Tanto a equação 11.22 como a equação 11.23 são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficientes constantes, apenas a última não tem o termo independente e portanto, separando as variáveis, pode-se integrar os dois lados dessa equação:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}, \quad (11.24)$$

$$\int_{Q_o}^Q \frac{dQ}{Q} = -\int_{Q_o}^Q \frac{dt}{RC}, \quad (11.25)$$

$$\ln Q - \ln Q_o = -\frac{t}{RC} \quad (11.26)$$

$$-\ln \frac{Q}{Q_o} = -\frac{t}{RC}, \quad (11.27)$$

$$Q(t) = Q_o e^{-t/RC}. \quad (11.28)$$

O comportamento durante a descarga do capacitor é decrescente de forma exponencial. Quanto à corrente, basta derivar a Eq. 11.28 em relação ao tempo o que também resulta em um comportamento exponencial como

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_o}{RC} e^{-t/RC}, \quad (11.29)$$

mas como $Q_o/C = V_0 = \epsilon$, a corrente inicial será $\epsilon/R = I_0$ portanto,

$$I(t) = -I_0 e^{-t/RC}. \quad (11.30)$$

O sinal negativo da corrente, indica que ela circula em direção contrária à corrente de carga do capacitor. A representação temporal na descarga das funções $Q(t)$ será feita de forma gráfica, na Fig. 11.11(a), o que esclarecerá o seu carácter exponencial.

Carga do capacitor.

A solução da equação 11.22 pode ser obtida de muitas maneiras. A mais simples seria encontrar o fator integrador, ou mesmo pelo processo de tentativas. Vamos utilizar o método de solução a partir da combinação linear de duas soluções simples. A primeira Q_1 é a própria solução já obtida pela equação 11.23 e a segunda Q_2 é obtida considerando o caso em que a derivada da carga é nula ou seja:

$$\frac{Q_1}{RC} = \epsilon C,$$

que resulta em duas soluções independentes:

$$Q_1 = \epsilon C, \quad (11.31)$$

$$Q_2 = Q_o e^{-t/RC} = \epsilon C e^{-t/RC}. \quad (11.32)$$

A combinação linear destas duas soluções para a equação 11.22 deve obedecer às condições físicas, ou seja, para uma carga inicial nula, quando a chave é colocada na posição 1, atinge-se o valor de equilíbrio Q_o após um tempo muito longo e quando se passa a chave para a posição 2, ou seja quando se elimina a fem a carga tende a zero para um tempo longo. Portanto a solução será:

$$Q(t) = Q_1 - Q_2 = \epsilon C - \epsilon C e^{-t/RC} \quad (11.33)$$

$$= \epsilon C (1 - e^{-t/RC}). \quad (11.34)$$

Derivando a Eq. 11.33, obtém-se a corrente elétrica para a carga do capacitor.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}. \quad (11.35)$$

Agora também é possível observar essas duas soluções, para o crescimento da carga, de forma gráfica na Fig. 11.11(b).

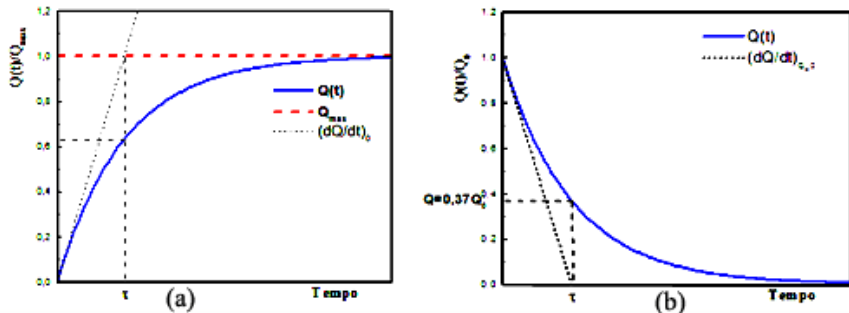


Figura 11.11: Características das funções descarga (a) e carga (b) de um capacitor

A comparação das funções $Q(t)$ e $I(t)$ tanto na carga como na descarga do capacitor são observadas nas Figuras 11.12 para descarga e 11.13 para a carga.

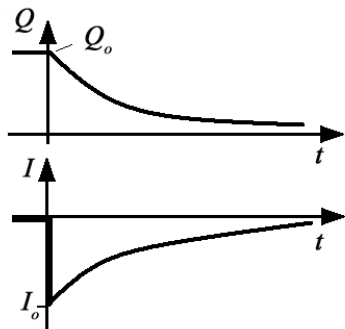


Figura 11.12: Variação temporal da carga elétrica e corrente na descarga de um capacitor.

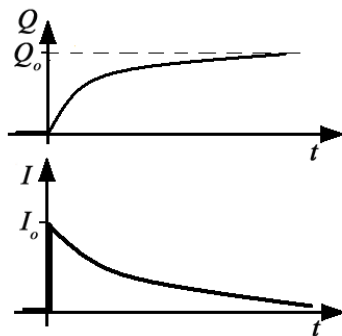


Figura 11.13: Variação temporal da carga e da corrente na carga de um capacitor.

11.3.1 Conservação da energia no circuito RC

Aplicando-se o princípio da conservação da energia, pode-se dizer que para cada carga dQ fornecida pela fonte esta realiza um trabalho:

$$dW = \epsilon dQ, \tag{11.36}$$

que é dissipado em forma de calor no resistor

$$dW_R = RI^2 dt, \quad (11.37)$$

e em energia armazenada no capacitor como campo elétrico:

$$V dq = \frac{Q}{C} dQ. \quad (11.38)$$

Para a condição de equilíbrio, no qual o $t \gg RC$, observa-se que a carga atinge o valor $Q \simeq C\epsilon$, portanto a energia armazenada no capacitor será dada por:

$$U_c = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\epsilon^2}{2}. \quad (11.39)$$

A potência dissipada no resistor, é dada por,

$$P_R = RI^2 = \frac{\epsilon^2}{R} e^{-2t/RC}, \quad (11.40)$$

e a energia dissipada será igual à integral temporal da potência,

$$W_R = \frac{\epsilon^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{C\epsilon^2}{2}. \quad (11.41)$$

Portanto, verifica-se que a energia produzida pela fonte, será igualmente dividida no armazenamento de carga no capacitor e dissipação de calor na resistência:

$$W_{fem} = W_R + U_C = C\epsilon^2. \quad (11.42)$$

11.4 Circuito RL: crescimento e decaimento da corrente

O circuito RL série: contém dois elementos principais, um resistor R e um indutor L , como mostra a Fig. 11.14. Os resistores têm como característica principal a transformação de energia elétrica em energia térmica, já os indutores transformam a corrente elétrica em energia magnética. Neste circuito consta uma fem que fornecerá a energia e uma chave para realizar as operações de crescimento e decaimento da corrente.

De forma análoga ao que foi feito para o circuito RC, pode-se escrever a regra de Kirchoff para as malhas para o circuito RL série apresentado na Fig. 11.14, quando a chave está na posição 1. O valor da fem ϵ_L , induzida é obtida a partir da Lei de Faraday.

$$\begin{aligned} \epsilon - RI - \epsilon_L &= 0 \\ \epsilon - RI - L \frac{dI}{dT} &= 0 \end{aligned} \quad (11.43)$$

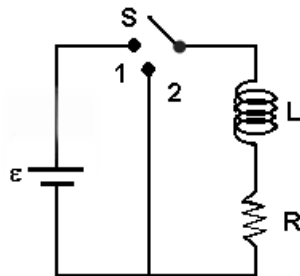


Figura 11.14: Circuito RL para “carregar e descarregar” um campo magnético.

Deve-se lembrar que todos os circuitos elétricos contêm uma indutância L assim como uma resistência, R , intrínsecas do circuito, mesmo que não haja um indutor específico para produzir campo magnético. A Eq. 11.43 é escrita na forma de uma equação diferencial para a corrente em função do tempo, na qual a força eletromotriz da fonte representa um termo independente:

$$\frac{dI}{dT} + \frac{R}{L}I = \epsilon. \quad (11.44)$$

Esta equação representa uma função de comportamento do tipo exponencial, pois a derivada dela é a própria função, a menos de constantes. Observe-se que existe uma grande diferença entre um indutor e um resistor. Enquanto a diferença de potencial através de uma resistência é proporcional ao valor da corrente (RI), no indutor a diferença de potencial é proporcional à variação da corrente (LdI/dt).

Crescimento da corrente

Considerando que o circuito RL possui um resistor e um indutor em série com a fonte, para $t = 0$, ao ligar-se a chave na posição 1 a corrente cresce lentamente atingindo o seu valor máximo só para $t \rightarrow \infty$. Isto é consequência da existência da fem auto-induzida no indutor L . Para o caso da variação da corrente ser positiva, $\frac{dL}{dt} > 0$, a Eq. 11.44 pode ser escrita separando-se as variáveis:

$$\frac{dI}{I - \frac{\epsilon}{R}} = -\frac{dt}{\frac{L}{R}}, \quad (11.45)$$

Integrando em ambos os lados e considerando $I(t = 0) = 0$, chega-se a uma solução da Eq. 11.44 que é formalmente análoga à da carga do capacitor no

circuito RC:

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (11.46)$$

na qual $\frac{L}{R}$ é um parâmetro denominado constante de tempo do circuito RL.

O comportamento da corrente pode ser observado na Fig. 11.15. Depois de um longo tempo, ou seja $t \gg L/R$, a corrente se satura o que mostra a corrente se aproximando exponencialmente do valor $I_\infty = \epsilon/R$. A constante de tempo $\tau = L/R$, está relacionada com a inércia ao se estabelecer o campo magnético, característica do processo de indução magnética.

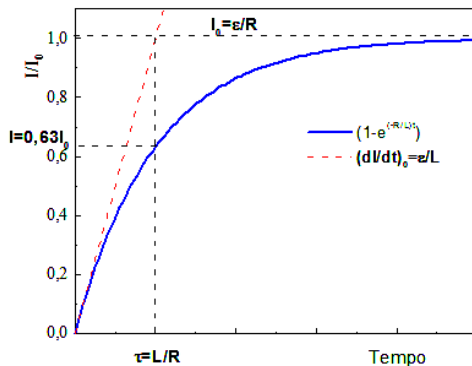


Figura 11.15: Característica da curva de crescimento da corrente do circuito RL conforme a solução Eq. 11.46

O comportamento qualitativo da corrente em função vários valores de indutância, observado na Fig. 11.4, é descrito pela Eq.11.46 e mostrado na Fig. 11.4 na qual se observa que a corrente de saturação $\frac{\epsilon}{R}$ ocorre para o caso em que a fem no indutor é nula $\epsilon_L = 0$, ou seja o indutor se comporta como um curto circuito.

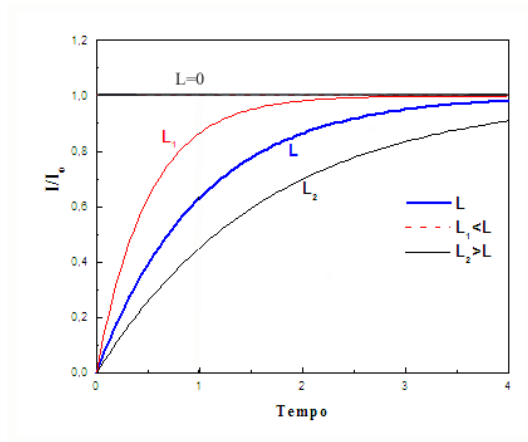


Figura 11.16: Crescimento da corrente no circuito RL em função do tempo

A expressão da fem auto-induzida pode ser obtida a partir da derivação da equação da corrente:

$$|\epsilon_L| = -L \frac{dI}{dt}, \tag{11.47}$$

portanto

$$\epsilon_L = L \frac{dI}{dt} = \epsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{11.48}$$

Como consequência observa-se que a fem auto-induzida tende a zero no infinito ou seja nessa condição a o circuito se torna unicamente resistivo.

Decaimento da corrente

Quando o campo magnético estiver estabelecido para um dado valor de corrente I , a chave do circuito 11.14 é passada para a posição 2, retirando-se dessa maneira a fem e dessa forma fazendo com que a corrente I tome o sentido inverso com uma taxa de variação negativa, $\frac{dI}{dt} < 0$, portanto a equação das malhas poderá ser escrita como:

$$\epsilon_L - RI = -L \frac{dI}{dt} - RI, \tag{11.49}$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{dt}{(L/R)}, \tag{11.50}$$

cujas solução será obtida pela integração:

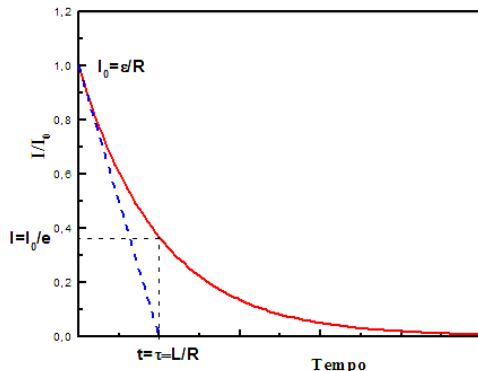


Figura 11.17: Decaimento da corrente no circuito RL em função do tempo

$$I(t) = \frac{\epsilon}{L} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (11.51)$$

Este comportamento mostra que a corrente se aproxima do seu valor assintótico, $I_\infty = 0$ com o mesmo tempo característico ou constante de tempo $\tau = L/R$. Quando L for medido em *henrys* e R em *ohms*, a constante de tempo será em segundos. Esta constante de decaimento τ é a mesma para o crescimento e decaimento da corrente.

O comportamento deste circuito RL pode ser observado na Fig. 11.17 quando o campo magnético se dissipa, produzindo o aquecimento no resistor.

Ao se estabelecer a corrente, ligando-se a chave na posição 1, a corrente inicialmente cresce até o limite ôhmico, ϵ/R e ao passar a chave para a posição 2 força-se a corrente cair até zero. Este comportamento é o fator predominante que se deve levar em consideração que ocorre quando se liga e desliga um circuito indutivo, ocorrendo por efeito de indução a produção de faíscas nos contatos, o que pode deixar de ser um problema matemático e se tornar um sério problema de segurança. Também se pode concluir que neste circuito a indução desaparece para $t \rightarrow \infty$, tanto no crescimento como no decaimento da corrente, fazendo com que a indutância a partir daí atue como um simples condutor de resistência R .

A observação deste comportamento do circuito RL, pode ser feito com o uso de um gerador de funções e um osciloscópio. Na Fig. 11.18, mostramos o comportamento indutivo quando o circuito é submetido a um fem de potencial definido pela fonte de onda quadrada que atua como a chave S do circuito 11.14. A seleção da frequência da onda quadrada depende da constante de tempo do circuito RL.

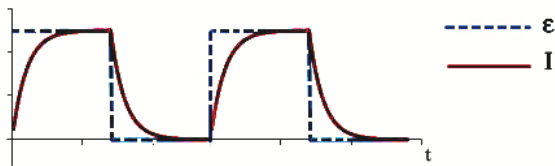


Figura 11.18: Observação no osciloscópio do comportamento temporal do crescimento e decaimento de corrente, em função de fem de uma fonte de onda quadrada.

Armazenamento de energia no campo magnético

O armazenamento de energia no indutor, pode ser observado pela energia dissipada na resistência e armazenada no campo magnético. Multiplicando-se a Eq.11.43 por I ,

$$\epsilon I = RI^2 + LI \frac{dI}{dT}, \tag{11.52}$$

Em termos de energia, podemos dividir a energia fornecida pela fonte, ϵI , em cada instante como sendo igual à soma da energia dissipada na resistência sob a forma de calor, RI^2 , mais a energia armazenada sob a forma de campo magnético, $LI \frac{dI}{dt}$. Enquanto que o calor é dissipado a energia do campo magnético pode ser recuperada como se observou quando se retira a fem, ligando a chave na posição 2 resultando em:

$$RI^2 = LI \frac{dI}{dT} = \frac{dU}{dt}. \tag{11.53}$$

A energia dissipada em um tempo dt é dada por $RI^2 dt$, portanto a integral a seguir, resultará no valor da energia armazenada no indutor e dissipada em R;

$$U = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty RI_o^2 e^{(-2t/\frac{R}{L})} dt = \frac{1}{2} LI_o^2. \tag{11.54}$$

A energia fornecida pela fonte, para estabelecer o campo magnético, para uma dada corrente I pode ser calculada percebendo-se que quando temos essa corrente aumentando no indutor, o trabalho para gerar o campo magnético $B(I)$ será:

$$\int_0^t dW = \int_0^t LI \frac{dI}{dt} dt = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \tag{11.55}$$

11.5 Circuito LC

O circuito LC série é desprovido, de alguma maneira, de resistores. Considerando que a energia esteja inicialmente como carga do capacitor, fornecida no caso por uma fonte como a do circuito e supondo-se, então, que a chave do circuito 11.19, seja ligada na posição 2, após uma carga inicial Q_o no capacitor ter sido estabelecida.

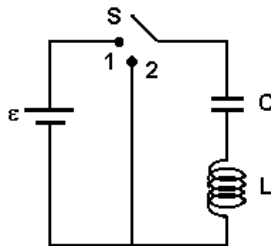


Figura 11.19: Circuito LC

A regra das malhas de Kirchhoff para o circuito LC sem fonte será

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0, \quad (11.56)$$

em que, novamente, tem-se uma equação com duas incógnitas, carga e corrente assim relacionadas: $I = dQ/dt$ e $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$. Dessa maneira pode-se escrever que:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad (11.57)$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad \text{ou} \quad (11.58)$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_o^2 Q = 0, \quad (11.59)$$

na qual $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. A derivada da Eq. 11.56, nos permite escrever que:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0, \quad \text{ou} \quad (11.60)$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega_o^2 I = 0, \quad (11.61)$$

A equações 11.58 e 11.60 acima são equações diferenciais de segunda ordem, incompletas e homogêneas. Nas equações deste tipo a derivada segunda de $Q(t)$ ou de $I(t)$ é a própria função, a menos de algumas constantes. Isto sugere, intuitivamente, que a que a solução deste tipo de equação diferencial

deva ser uma função do tipo periódica, como seno, cosseno ou combinações delas. Com base nisto consideramos que a solução deste circuito é a mesma do oscilador harmônico que para $Q(t)$ pode ter a forma:

$$Q(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (11.62)$$

na qual A , ω e ϕ , são constantes a determinar usando as condições físicas conhecidas: para $t = 0$ considera-se que o capacitor está carregado com uma carga Q_o resultando em:

$$Q(t) = Q_o \cos(\omega t + \phi). \quad (11.63)$$

Utilizando a solução Eq. 11.63 podemos obter a derivada segunda desta equação,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -Q_o \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (11.64)$$

Substituindo a Eq. 11.63 e Eq. 11.64, na Eq.11.59,

$$-LQ_o \omega^2 \cos(\omega t + \phi) + \frac{Q_o}{C} \cos(\omega t + \phi). \quad (11.65)$$

Dessa maneira pode-se obter a constante ω): $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. A frequência angular ω da oscilação é a mesma para a carga e corrente, o que pode ser verificado derivando a equação da carga Eq.11.63 portanto,

$$I(t) = -Q_o \omega \sin(\omega t + \phi) = I_o \sin(\omega t + \phi) \quad (11.66)$$

na qual I_o representa a amplitude real e ϕ a fase inicial.

As duas constantes são reais e devem satisfazer as condições iniciais, já que se trata de uma equação diferencial de segunda ordem. Supondo que se conheça a corrente e a carga iniciais, por exemplo a corrente I_o no indutor e a carga Q_o no capacitor, a carga pode ser obtida pela integral no tempo da corrente, equação 11.66:

$$Q(t) = \int I dt = \frac{I_o}{\omega} \cos(\omega t + \phi). \quad (11.67)$$

O caso mais simples é aquele em que a corrente inicial é nula e a carga está toda concentrada no capacitor, resultando, pela substituição na equação 11.67, os seguintes valores para as constantes serão:

$$I_o = \omega Q_o \quad e, \quad (11.68)$$

$$\phi = \pi/2. \quad (11.69)$$

Na Figura 11.20 pode-se observar o comportamento da corrente e carga em função do tempo.

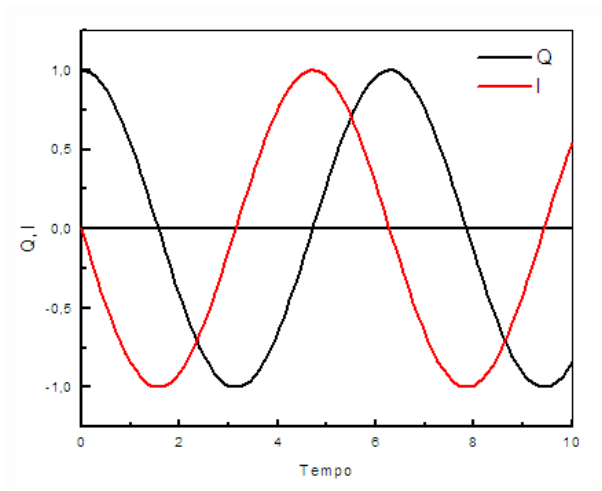


Figura 11.20: Comportamento oscilatório da carga no capacitor e da Corrente no circuito LC

A oscilação do circuito LC é de grande utilidade, para lâmpadas sinalizadoras e pode ser entendido como um circuito no qual a energia inicialmente armazenada no capacitor, oscila entre o campo magnético e carga no capacitor. No circuito LC a energia total é a soma da energia armazenada no capacitor e no campo magnético portanto,

$$U_T = U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}. \quad (11.70)$$

Substituindo as soluções periódicas para a carga e corrente

$$U_t = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2} \text{seno}^2(\omega t + \phi) \quad (11.71)$$

e levando em consideração que $\omega^2 = (LC)^{-1}$ e $\cos^2(\omega t + \phi) + \text{sen}^2(\omega t + \phi) = 1$, resulta em:

$$U_T = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad (11.72)$$

O gráfico 11.21, ilustra a contribuição elétrica e magnética ao valor da energia total.

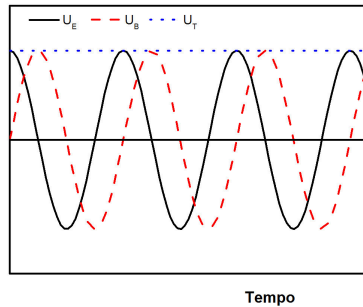


Figura 11.21: Energia elétrica e magnética

Dessa maneira conclui-se que a energia total é constante e igual à energia inicial necessária para carregar o capacitor. Como o circuito analisado possui resistência nula ele oscilará indefinidamente transferindo energia do capacitor para o campo elétrico e viceversa. Este circuito tem comportamento análogo ao oscilador harmônico mecânico.

11.6 Circuito RLC sem fonte

O circuito RLC série : como mostra a Fig. 11.22 é um circuito sem fonte, cuja energia é provida pela carga inicial do capacitor.

O circuito RLC, sem fonte, como o da Fig. 11.22 é um circuito oscilador amortecido no qual o capacitor deverá estar inicialmente carregado, resultando uma diferença de potencial $V_C = Q/C$ responsável pela alimentação do circuito.

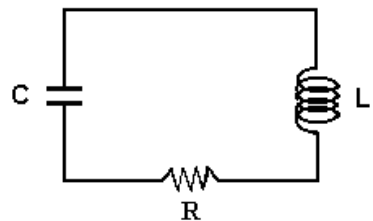


Figura 11.22: Circuito RLC série sem fem.

Aplicando a lei das malhas ao circuito da Fig. 11.22,

$$V_L + V_R + V_C = 0. \quad (11.73)$$

Esta equação representa a soma das diferenças de potencial medidas instantaneamente ao longo do circuitos cujos valores em função da carga e da corrente serão:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0. \quad (11.74)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo e dividindo por L ,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} I + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (11.75)$$

Considerando a relação entre a carga, corrente e potencial entre as placas do capacitor teremos:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (11.76)$$

$$= C \frac{dV}{dt} \quad (11.77)$$

$$\frac{dI}{dt} = C \frac{d^2 V}{dt^2}. \quad (11.78)$$

Dessa forma poderemos escrever a equação das malhas 11.74 para a carga,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (11.79)$$

e para o potencial entre as placas do capacitor:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = 0 \quad (11.80)$$

Reconhecemos que as três equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e homogêneas, Eq. 11.75, 11.79 e 11.80, possuem solução do tipo harmônico amortecido nas quais a resistência R é a responsável pelo amortecimento.

Inicialmente escolhemos uma solução particular que satisfaz essa condição, para solucionar a equação diferencial da carga, Eq. 11.80 tentando uma solução oscilatória amortecida do tipo:

$$Q(t) = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t, \quad (11.81)$$

na qual A , α e ω são constantes.

Para testar esta solução vamos deriva-la e substituindo na Eq. 11.79:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Ae^{-\alpha t} (-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t); \quad (11.82)$$

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = Ae^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha \omega \sin \omega t]; \quad (11.83)$$

resultando em:

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\text{sen}\omega t - \frac{R}{L}\cos\omega t + \omega(\text{sen}\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0 \quad (11.84)$$

Esta igualdade Eq. 11.84 se verifica quando:

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \rightarrow \omega(2\alpha - \frac{R}{L}) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} \quad (11.85)$$

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \quad (11.86)$$

Para o caso em que ω seja um valor real teremos $\omega^2 > 0$, portanto a solução proposta Eq. 11.81 só ocorrerá se

$$\frac{R^2}{4L^2} \leq \frac{1}{LC}; \text{ conseqüentemente } R \leq 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.87)$$

A solução proposta, Eq. 11.81, não é única ou seja temos outra solução periódica, como

$$Q(t)Be^{-\alpha t}\text{sen}\omega t, \quad (11.88)$$

portanto podemos considerar a solução geral a soma das duas,

$$Q(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\text{sen}\omega t), \quad (11.89)$$

na qual as constantes A e B são ajustadas às condições iniciais.

A solução envolvendo função seno e cosseno, ou superposição dos mesmos depende apenas da escolha da origem dos tempos. Dessa forma pode-se analisar de forma qualitativa como sendo um fenômeno senoidal amortecido. Para tal vamos comparar as soluções, por analogia com a da carga, para a tensão e corrente. A solução do potencial é análoga à da carga bastando dividi-la por C :

$$V(t) = \frac{A}{C}e^{-\alpha t}\cos\omega t. \quad (11.90)$$

A solução da corrente pode ser obtida derivando a da carga em relação ao tempo:

$$I(t) = A\omega e^{-\alpha t}(\text{sen}\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t) \quad (11.91)$$

Vamos examinar o caso em que resistência é muito pequena, ou seja o circuito é fracamente amortecido, de forma diferente podemos dizer que:

$$\frac{\alpha}{\omega} = 0; \text{ ou } \omega \gg \alpha. \quad (11.92)$$

Desta forma a corrente Eq. 11.91 poderá ser escrita como:

$$I(t) = A\omega e^{-\alpha t}\text{sen}\omega t \quad (11.93)$$

Nessas condições pode-se analisar o comportamento das funções $V(t)$ e $I(t)$:

$$\text{para } t = 0$$

$$Q(0) = A \text{ (valor máximo de } Q)$$

$$V(0) = AC \text{ (valor máximo de } V)$$

$$I(0) = 0$$

$$\text{para } t = \pi/2\omega = T/4 \text{ (1/4 do período de oscilação)}$$

$$Q(\pi/2\omega) = 0$$

$$V(\pi/2\omega) = 0$$

$$I(\pi/2\omega) = A\omega \text{ (valor máximo de } I(t))$$

A Fig. 11.23 mostra as duas funções $V(t)$ e $I(t)$, mostrando que elas estão defasadas de $\pi/2$. Os máximos de $V(t)$ e $I(t)$, indicam o momento no qual a energia está toda acumulada em C e L, respectivamente. A cada $t = T/4$, a energia passa de do indutor para o resistor e vice versa.

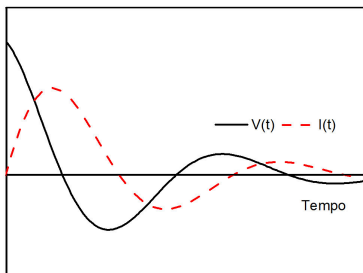


Figura 11.23: Oscilação senoidal amortecida, mostrando a tensão e a corrente no circuito RLC

No caso de um circuito onde ocorre um forte amortecimento, com $R > 2\sqrt{L/C}$, não ocorre oscilação apenas um decréscimo do potencial e nesse caso a equação diferencial para o potencial Eq. 11.80, terá uma solução do tipo exponencial do tipo:

$$V(t) = \frac{A}{C}e^{-\beta_1 t} + \frac{B}{C}e^{-\beta_2 t}. \quad (11.94)$$

Para a condição de amortecimento crítico $R = 2\sqrt{L/C}$, $\beta_1 = \beta_2$ portanto, teremos a seguinte solução

$$V(t) = \left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}t\right)e^{-\beta t}. \quad (11.95)$$

A evolução deste comportamento pode ser observada na Fig. 11.24 com dois comportamentos subcríticos e outro fortemente amortecido.

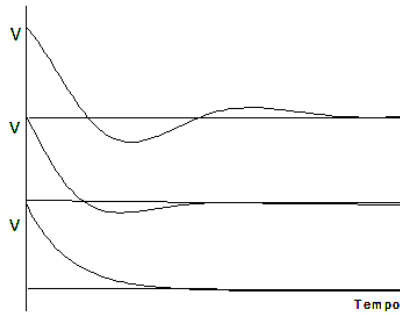
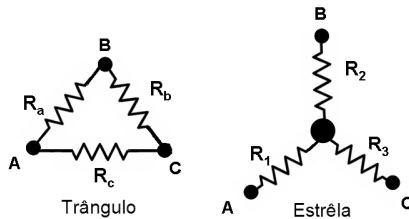


Figura 11.24: Evolução do amortecimento até o início da condição de decréscimo da função potencial sem oscilação.

11.7 Questões, Exercícios e Problemas

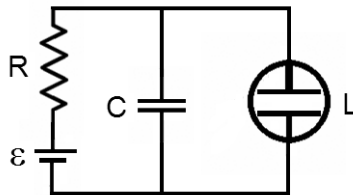
1. Calcule o valor da corrente que passa através de cada um das resistências do circuito da Fig. 11.6, quando $\epsilon = 12V$; $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $R_3 = 4\Omega$; $R_4 = 5\Omega$.
2. Considerando que o circuito da Fig. 11.6 é utilizado para manter uma pequena lâmpada, cuja resistência é R_3 com brilho constante, calcule o valor de R_3 de tal maneira que a potência dissipada nessa resistência varie o menos possível para pequenas variações de R_3 , para $R_1 = 50\Omega$; $R_2 = 100\Omega$; $R_4 = 0\Omega$.
3. Duas lâmpadas de filamento e iluminação, de mesma potência, podem ser ligadas em paralelo ou em série com uma fonte de tensão. Escolha a melhor associação e justifique a resposta.
4. Duas lâmpadas de 100 W em 220 V são colocados em série e em paralelo com um diferença de potencial e 110 V . Qual é o valor da potência total dissipada nos dois casos?
5. Considere os circuitos de três resistências, em triângulo e em estrela, conforme a figura abaixo e obtenha as condições de equivalência dos dois circuitos, ou seja resistências iguais entre os pontos A-B, B-C e A-C.



6. Calcule o valor da corrente que passa através de cada um das resistências do circuito 11.2, quando: $\epsilon_1 = 12V$; $\epsilon_2 = 6V$; $\epsilon_3 = 3V$; $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $R_3 = 4\Omega$; $R_4 = 5\Omega$; $R_5 = 5\Omega$.
7. Obtenha a capacitância equivalente, entre os pontos A e D, do circuito da Fig. 11.9 para os seguintes valores de capacitância, $C_1 = 1\mu F$; $C_2 = 2\mu F$; $C_3 = 3\mu F$; $C_4 = 4\mu F$ e $C_5 = 5\mu F$.
8. Demonstre que quando circuito RC série é ligado depois de um tempo muito longo se verifica que metade da energia fornecida pela bateria

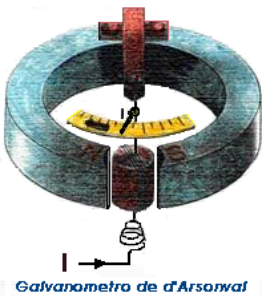
é dissipada na resistência e a outra metade é armazenada no campo elétrico do capacitor.

9. Um circuito RC é ligado a uma bateria de $12V$ durante 1 minuto. Considere-se que $R = 100\Omega$ e $C = 2,5\text{ mF}$. a) Qual será o valor da carga armazenada no capacitor? b) Qual será a energia armazenada no capacitor e o valor da energia dissipada na resistência?
10. Mostre que as constantes, L/R , \sqrt{LC} e RC possuem unidades de tempo (s).
11. O circuito LC é conhecido como um circuito oscilante, puro, ou seja a sua oscilação ocorre de acordo com o movimento harmônico, quando se introduz uma pequena resistência, em série, no circuito, a oscilação continua harmonica? Explique o funcionamento desse circuito do ponto de vista físico, em termos da energia.
12. A lanterna pisca-pisca, funcionando à base de um circuito RLC, é uma excelente ideia para iniciar o seu hobby em eletrônica. A figura abaixo representa o esquema de uma lanterna pisca-pisca, sinalizadora, autônoma e de pequena potência, para ser utilizada em canteiros de obras ao longo de rodovias, em bicicletas etc. A lâmpada fluorescente funciona como uma indutância, em paralelo com um circuito RC. Quando o potencial atinge $V_L = 72V$, com uma bateria de $90V$ e um capacitor de $0,2\mu F$ a lâmpada pisca. Supondo que a lâmpada deva acender a cada $0,5s$, qual deve ser o valor da resistência R ?



CAPÍTULO 12

Medidas Elétricas



Jacques Arsène d'Arsonval, 1851-1940 físico, médico e francês foi o pioneiro da eletroterapia. Entre suas invenções se encontra o galvanômetro de bobina móvel, inventado em 1882, capaz de medir pequenas correntes elétricas possui, ainda hoje, grande aplicação industrial.

12.1 Introdução

Hoje em dia as medidas elétricas são feitas com instrumentos muito sofisticados, em geral ligados diretamente a processadores, para aquisição direta de dados. Apesar dessa automação crescente, as medidas de corrente de tensão e resistência são feitas por instrumentos, que se baseiam em princípios fundamentais utilizados para todos os tipos de medidas físicas.

Um instrumento de medida é sempre constituído de três módulos fundamentais, um *transdutor* que transforma a medida em um sinal mecânico, elétrico ou pneumático, segundo o princípio físico utilizado, um *conformador de sinal*, que amplifica, filtra, e processa o sinal do transdutor, um *registorador ou indicador* que transforma o sinal em um número que o usuário possa

ler adequadamente. o transdutor escolhido, para estas notas, é o velho galvanômetro de d'Arsonval. Nas Fig. 12.1 e 12.2, mostra-se o princípio dos instrumentos de medida elétrica em comparação com a balança de braços. Nesse transdutor a corrente que circula na bobina faz com que a força magnética produza uma atração do núcleo de ferro para dentro do solenoide produzindo um deslocamento proporcional à corrente, um instrumento analógico semelhante à balança de braços, Fig. 12.1. O equilíbrio do ponteiro será dado por uma mola e um amortecedor.

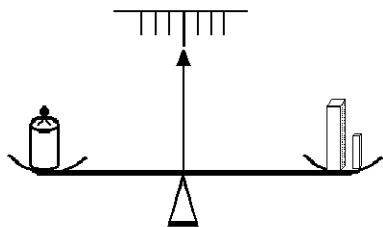


Figura 12.1: Balança de braços, que representa o princípio de um instrumento de medida analógico.

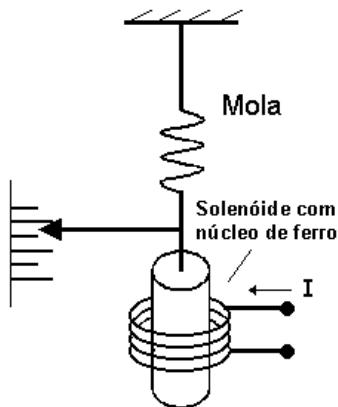


Figura 12.2: Princípio de medida de um instrumento de medida elétrica.

12.2 Galvanômetro d'Arsonval

A maioria dos instrumentos de medidas elétricas, analógicos são baseados na utilização do galvanômetro de d'Arsonval, também chamado instrumento de bobina móvel. Este galvanômetro, mostrado na Fig. 12.3, consta de uma bobina de fio de cobre, muito fino, enrolada em um cilindro de alumínio, mantido entre as peças polares de um ímã permanente. Duas molas, uma de cada lado do cilindro, servem para posicionar a bobina e também conduzir a corrente que circula na mesma. Um ponteiro preso à bobina gira solidário com o cilindro, em um ângulo proporcional à corrente que circula na mesma. Quando uma pequena corrente I_g , de poucos μA , percorre a bobina colocada dentro de um campo magnético, aparece um conjugado motor, que faz com que a bobina gire em um ângulo proporcional a essa corrente. Ao mesmo tempo que a bobina gira, as molas espirais ficam sob tensão opondo-se ao movimento de rotação. Na condição em que o conjugado motor se iguala ao

conjugado contrário produzido pelas molas o ponteiro, solidário com a bobina, indicará na escala, previamente calibrada, o valor da medida, proporcional à corrente I_g que circula no galvanômetro.

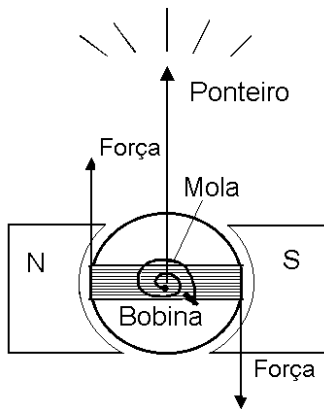


Figura 12.3: Princípio de funcionamento do galvanômetro de d'Arsonval

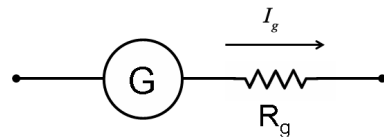


Figura 12.4: Símbolo galvanômetro em um circuito elétrico

A seguir, descreve-se como a partir de um galvanômetro se constrói cada um dos instrumentos básicos para medir corrente, tensão e resistência elétrica. Mesmo que o galvanômetro seja digital os princípios de medida para os instrumentos serão os mesmos e ao final do capítulo, a título de ilustração uma pequena leitura sobre instrumentos digitais.

12.3 Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros

Os instrumentos básicos de medida de corrente, tensão e resistência, em geral estão associados em um Multímetro, um único instrumento, no qual o galvanômetro é o sensor básico, seja ele analógico ou digital.

12.3.1 Amperímetro

Os instrumentos de bobina móvel ou galvanômetros são, na realidade, micro-amperímetros, cujo fundo de escala é determinado pelo valor máximo da corrente I_g que circula na bobina do instrumento utilizado, como é mostrado na Fig. 12.4. O uso do galvanômetro, como o amperímetro, exige sempre uma resistência de proteção colocada em paralelo com o instrumento, evitando que a corrente no galvanômetro possa ultrapassar o valor de I_g máximo. Essa

resistência, colocada em paralelo, é chamada *shunt*, conforme se pode observar na Fig. 12.6. Considerando que uma corrente I circule pelo amperímetro, mostrado na Fig. 12.6 pode-se escrever a equação das malhas

$$R_S(I - I_g) = r_g I_g. \quad (12.1)$$

Isolando a corrente I que circula no amperímetro, tem-se a medida do amperímetro:

$$I = \frac{I_g(R_S + r_g)}{R_S}. \quad (12.2)$$

O valor da medida da corrente será proporcional ao valor da corrente no galvanômetro bastando trocar o valor do shunt para ter diferentes alcances da escala de corrente. É importante lembrar que para medir a corrente é necessário intercalar o amperímetro, colocando-o em série com o circuito, como mostra a Fig. 12.5. Para a seleção de um amperímetro, utiliza-se a chamada qualidade do amperímetro. A **qualidade de um amperímetro** é medida

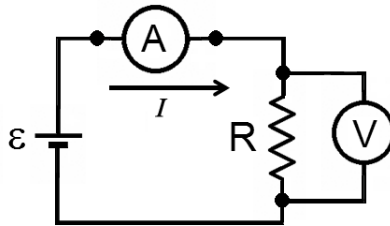


Figura 12.5: Maneira usual de medir corrente e tensão, utilizando um amperímetro e um voltímetro.

da sua condutância dividida pela corrente de fundo de cada escala. Como a condutância é o inverso da resistência e é dada em **Siemens**, a condutância específica de um amperímetro será dada em **Siemens/Ampère**.

$$\text{Qualidade do amperímetro} = \frac{1}{R_A I_{fe}} [\Omega^{-1} A^{-1}]$$

12.3.2 Voltímetro

Os voltímetros podem ser construídos pela adição de resistências elétricas em série com um galvanômetro. A função da resistência é limitar a corrente que atravessa a bobina do galvanômetro ao valor máximo de I_g que ela possa

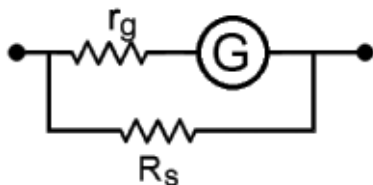


Figura 12.6: Princípio de construção de um amperímetro a partir de um galvanômetro

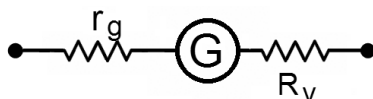


Figura 12.7: Princípio de funcionamento de um voltímetro a partir de um galvanômetro

suportar com segurança. Na Fig. 12.7 encontramos o princípio básico de um voltímetro com uma única escala de medida determinada pelo valor da resistência R_v . Considerando que a resistência do galvanômetro seja r_g , poderemos escrever a equação das malhas para o circuito da Fig. 12.7:

$$V = (r_g + R_v)I_g \quad (12.3)$$

Como já foi dito, a escala do voltímetro é determinada pela escolha de uma resistência R_v portanto, a medida de V será proporcional ao valor de I_g , cujo valor máximo é definido pelo fabricante do galvanômetro com uma certa segurança.

É importante saber que o voltímetro, ao ser colocado em paralelo com um circuito, como se pode observar na Fig. 12.5, para medir a tensão requer uma pequena corrente capaz de defletir o seu ponteiro. Quando essa corrente não é desprezível, em relação à corrente que circula no circuito, será preciso ou usar um instrumento de sensibilidade mais adequada ou corrigir a medida devido a esse fato. Lembre-se sempre do circuito equivalente a um voltímetro, presente na Fig. 12.7, pois ao colocar o voltímetro em paralelo a resistência R_v também será colocada em paralelo com o circuito.

A sensibilidade de um voltímetro, que é indicativo da sua qualidade, é definida pela relação entre a resistência interna do voltímetro e a tensão limite da escala, $\Omega/Volt$:

$$\text{Sensibilidade do Voltímetro} = \frac{R_V}{V_{te}} [\Omega V^{-1}].$$

12.3.3 Ohmímetro

A medida da resistência elétrica pode ser feita por vários métodos, o primeiro, mais simples, é o da medida direta utiliza o multímetro, e o segundo, o de comparação, utiliza uma ponte de Wheatstone. Por sua simpli-

cidade, descreve-se somente o princípio de funcionamento do primeiro, ou do ohmímetro .

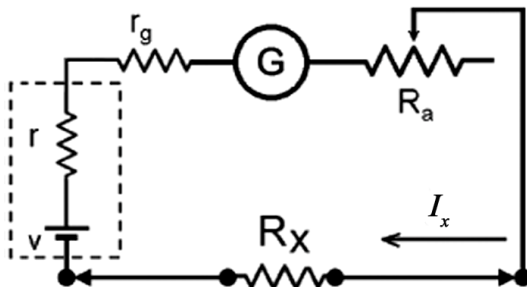


Figura 12.8: Princípio de funcionamento do ohmímetro a pilha a partir de um galvanômetro

O ohmímetro com fonte, também tem como instrumento de medida um galvanômetro cuja escala é graduada em Ohms. Na Fig. 12.8, apresenta-se o esquema básico, representando o princípio de funcionamento do mesmo. Dessa forma, pode-se observar que um ohmímetro simples pode ser construído colocando em série com o instrumento de bobina móvel, uma resistência R_x cujo valor que seira determinar, uma resistência variável R_a (potenciômetro), que permitirá o ajuste da escala a zero ohm, para diferentes condições de carga da fonte, cujo potencial é V e resistência interna r colocada também em série com os demais componentes. A equação das malhas para este circuito será:

$$V = I(r_g + R_x + R_a + r). \tag{12.4}$$

Para um dado alcance de medida, o valor da resistência interna do ohmímetro, sem a resistência R_x , será dada por $R_o = r_g + R_a + r$, portanto pode-se escrever a equação 12.4 da seguinte forma:

$$V = I(R_o + R_x), \tag{12.5}$$

na qual isolando o valor de R_x , resulta em

$$R_x = \frac{V}{I} - R_o. \tag{12.6}$$

O que mostra que o valor da resistência, a determinar, é inversamente proporcional à corrente, I , que circula no galvanômetro.

Calibração do Ohmímetro

Pode-se observar através da equação 12.6 que, para $R_x = 0$ a deflexão do instrumento é máxima, enquanto que para $R_x = \infty$ a deflexão é nula. Dessa maneira, é possível calibrar o ohmímetro, através de duas operações: a) com as ponteiros instaladas mas sem tocar as pontas, observa-se a condição aproximada de resistência $R_x = \infty$, portanto pode-se, calibrar a posição de resistência máxima da escala, a posição da esquerda, através da variação da posição do parafuso que aumenta a tensão na mola helicoidal no eixo do galvanômetro; b) para calibrar a posição zero, à direita da escala, é necessário, colocar as ponteiros em curto, ou seja fazendo $R_x = 0$ e girando o potenciômetro que permite obter um valor de R_a capaz de zerar o a medida.

12.4 Aplicações Científicas e Tecnológicas

12.4.1 Instrumentos digitais

Os multímetros eletrônicos, formam uma família de equipamentos eletrônicos muito grande e, hoje, tanto multímetros eletrônicos analógicos ou digitais são utilizados de forma generalizada e estes últimos são os de uso mais corrente. Os multímetros digitais estão baseados, em três componentes básicos, um circuito de medida ou leitura, um circuito com um módulo conversor analógico/digital responsável pelo recebimento do sinal a medir, seja ele corrente ou tensão, transformando-o em um sinal digital e um módulo de display digital, do qual consta o LCD, ou visor de cristal liquido. Nos instrumentos digitais, a calibração, tanto do zero como do fundo de escala, é feita de forma automática, pelo processador do aparelho. A título de ilustração mostram-se nas Fig. 12.9, 12.10 e 12.11 os esquemas em forma de diagrama em bloco, de um amperímetro, um voltímetro e um ohmímetro digitais, cujo funcionamento só poderá melhor entendido, depois de algumas aulas de eletrônica digital.

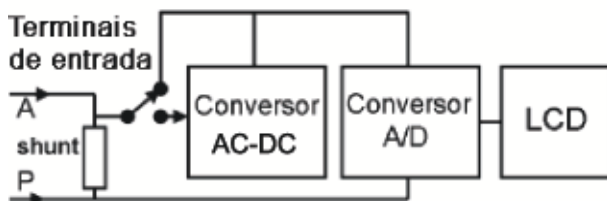


Figura 12.9: Princípio de construção de um amperímetro digital.

O diagrama de blocos dos três instrumentos digitais mostra a existência de duas unidades comuns que são o conversor analógico digital (A/D) e o

display de cristal liquido (LCD). O amperímetro e voltímetro também apresentam um bloco comum que é o conversor AC-DC, possibilitando as medidas de corrente e tensão alternadas.

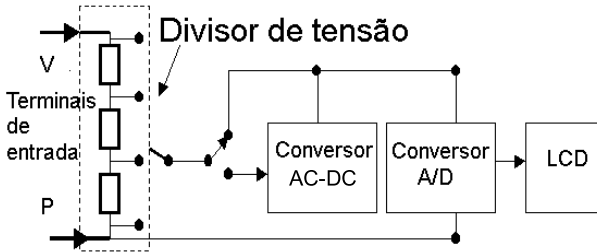


Figura 12.10: Princípio de funcionamento de um voltímetro digital.

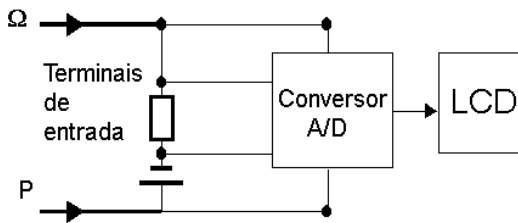


Figura 12.11: Princípio de funcionamento do ohmímetro digital.

12.5 Questões, Exercícios e Problemas

1. O instrumento de medida do nível de gasolina, no tanque de um veículo automotor, pode ser representado simplificada, pelo circuito da Fig. 12.12. O indicador do painel é um amperímetro que mede a corrente que circula no circuito, proporcional ao nível de combustível, já que uma boia, faz girar uma resistência variável. Quando o tanque está cheio, a resistência é mínima, por exemplo 10Ω e quando está vazio vale 20Ω . Supondo que a corrente máxima que pode passar no galvanômetro, é de $10\mu A$, qual deve ser a resistência do shunt, considerando que a bateria do automóvel é de $12V$.

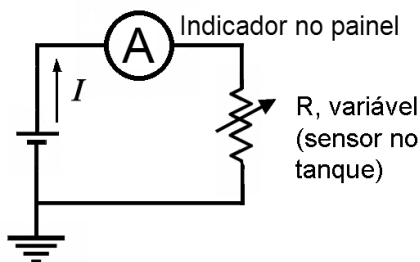


Figura 12.12: Indicador de nível de combustível, problema 1.

2. Construa o seu próprio Ohmímetro, como o da Fig. 12.13, colocando uma pilha de $1,5V$ e uma resistência R em série com um amperímetro cujo alcance é de $0 - 1mA$. Calcule o valor da resistência, colocando as pontas em contato, uma com a outra. Faça uma escala para o amperímetro, dividindo a escala do amperímetro em divisões proporcionais à corrente.

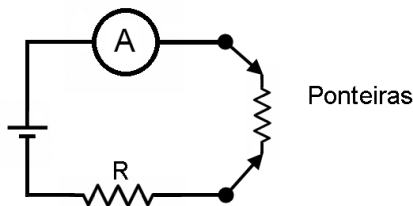


Figura 12.13: Esquema de um Ohmímetro de uma única escala, conforme o problema 2.

3. Ao medir a diferença de potencial, utiliza-se um voltímetro cuja resistência interna é da mesma ordem da resistência do circuito onde se coloca o voltímetro. Qual seria a solução para que resistência do voltímetro não altere a medida?
4. Com um voltímetro cuja resistência interna é de $10\text{ k}\Omega$, mede-se uma pilha padrão de $1,5\text{ V}$ e se obtém um valor de $1,24$. Qual é a resistência interna da pilha? Essa pilha ainda pode ser usada como padrão?
5. Necessita-se medir as quedas de potencial através de resistências, uma de 10 e outra de $100\ \Omega$ com precisão de $0,1$. Qual deve ser a resistência interna mínima do voltímetro para atingir essa precisão?
6. Um voltímetro com resistência interna $R_v = 10^5\ \Omega$ é utilizado para medir a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito, como na Fig. 12.5, cuja resistência da carga é de $10^3\text{ k}\Omega$ e a fonte é de 6 V . Qual a diferença de potencial indicado pelo voltímetro e qual o erro introduzido pela resistência do voltímetro?
7. Utilizando-se de um voltímetro e um amperímetro, cujas resistências internas são $1000\ \Omega$ e $1\ \Omega$ respectivamente, de forma usual como está mostrado na Fig. 12.5, com uma fonte de 12 V e uma resistência $R = 10\ \Omega$. Qual será a medida indicada pelo voltímetro e amperímetro?
8. Um dos instrumentos de medida de resistência elétrica mais antigo é a ponte de Wheatstone, sempre utilizado para medidas de resistências muito pequenas e grande precisão. Procure informações a respeito desse método e explique o seu funcionamento.
9. Explique como se poderá medir a resistência elétrica utilizando: a) só um amperímetro; b) só um voltímetro; c) um voltímetro e um amperímetro.
10. Tendo em vista o que foi estudado neste capítulo faça um resumo das propriedades de um bom voltímetro, um bom amperímetro e um bom ohmímetro.

APÊNDICE A

Análise Vetorial

A.1 Vetores

Uma grandeza física vetorial \vec{A} é definida por um vetor, cujo módulo ou norma é A e cuja direção é definida pelo versor, ou vetor unitário, $\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ portanto

$$\vec{A} = A\hat{u}_A. \quad (\text{A.1})$$

As operações com grandezas vetoriais, como o produto e a soma de vetores, são agora demonstradas utilizando dois vetores exemplo, \vec{A} e \vec{B} .

Produto Escalar: é um escalar cujo valor é

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta, \quad (\text{A.2})$$

em que θ é o ângulo entre os dois vetores \vec{A} e \vec{B} .

Produto Vetorial: entre dois vetores, é um vetor \vec{C} , normal ao plano formado pelos dois vetores \vec{A} e \vec{B} . O módulo desse vetor é dado por

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta, \quad (\text{A.3})$$

cuja direção é dada pela definição do triedro direto, onde o vetor \vec{C} é normal ao plano formado pelos dois vetores \vec{A} e \vec{B}).

Representação Cartesiana

Os vetores, representados em coordenadas cartesianas, possuem três componentes (A_x, A_y, A_z), sobre os três eixos coordenados, cujos versores são ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$), portanto

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}. \quad (\text{A.4})$$

A soma e os produtos escalar e vetorial entre os dois vetores, por exemplo, terão a seguinte forma cartesiana;

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}; \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z; \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

O módulo de um vetor pode ser calculado utilizando o produto escalar

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (\text{A.9})$$

enquanto que o ângulo θ pode ser calculado utilizando a relação entre o produto vetorial e escalar:

$$\arctan \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Operadores Vetoriais

As operações vetoriais podem ser feitas sobre campos escalares e vetoriais. Um campo escalar qualquer é uma função $f(\vec{r})$ que associa um escalar f a cada posição \vec{r} . Uma função vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ associa um vetor \vec{F} a cada ponto \vec{r} de um campo vetorial. Para realizar essas operações vetoriais utiliza-se, o operador diferencial $\vec{\nabla}$, definido, em coordenadas cartesianas, como

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}. \quad (\text{A.11})$$

Gradiente: a derivada direcional de um campo escalar é o produto entre o gradiente e o versor que define a direção. A representação de um campo escalar pode, dessa forma, ser representado, de forma equivalente, por um

campo vetorial que é o gradiente do campo escalar. O vetor gradiente é definido como:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}, \quad (\text{A.12})$$

Divergente: de forma semelhante, pode-se calcular o produto escalar entre o operador $\vec{\nabla}$ e sua função vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{A.13})$$

Rotacional: o produto vetorial do operador $\vec{\nabla}$, com o campo vetorial \vec{F} , permite definir o rotacional do campo, portanto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Laplaciano: o operador laplaciano ∇^2 , é obtido a partir do cálculo da divergência do gradiente de um campo escalar:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{A.15})$$

Teorema da divergência: a integral de superfície de uma campo vetorial pode ser calculada pela integral de volume da divergência desse mesmo campo:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \quad (\text{A.16})$$

Teorema de Stokes: a circulação de um campo vetorial, pode ser calculado pela integral do rotacional sobre a superfície limitada por essa circulação:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}. \quad (\text{A.17})$$

Análise de Campos Escalares e Campos Vetoriais

Os campos escalares e vetoriais são utilizados em vários ramos da Física, incluindo a eletricidade e o magnetismo, desse modo discutiremos as propriedades matemáticas dos campos escalares V e vetoriais \vec{E} lembrando que no nosso caso representam o potencial e o campo elétrico, mas considerando letras genéricas V e \vec{E} , podem representar qualquer tipo de campos conservativos.

B.1 Diferenciação de Campos Escalares e Vetoriais

As operações de diferenciação de campos escalares e vetoriais estão relacionadas com as diferentes operações que se podem realizar com o operador nabla $\vec{\nabla}$, por exemplo em um campo eletrostático o campo \vec{E} obedece às leis de Maxwell e podemos escrever:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \tag{B.1}$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{B.2}$$

Estas equações nos mostram duas operações de diferenciação do vetor campo elétrico. No caso de campos escalares temos ainda a operação $\text{grad}V$, ou gradiente de um campo escalar V definido em coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$\text{grad}V = \vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}, \tag{B.3}$$

em que \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vetores unitários ao longo dos eixos x , y e z . É conveniente lembrar que o operador $\vec{\nabla}$, ou como foi chamado aqui *grad* é definido por:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}. \quad (\text{B.4})$$

Como o campo elétrico é irrotacional, pode ser representado pelo gradiente de um campo escalar:

$$\vec{E} = -\text{grad}V, \quad (\text{B.5})$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}. \quad (\text{B.6})$$

Como se pode ver as operações de diferenciação estão ligadas a diferentes operações que se podem realizar com o operador vetorial $\vec{\nabla}$.

Outro operador importante na análise vetorial é o operador laplaciano ∇^2 , obtido no cálculo da divergência do gradiente da função potencial (função escalar). Trata-se do produto escalar entre o operador nabla aplicado ao gradiente de um campo escalar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \nabla^2V, \quad (\text{B.7})$$

portanto, teremos a expressão para o Laplaciano dada por:

$$\nabla^2V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V. \quad (\text{B.8})$$

O operador $\text{grad} = \vec{\nabla}$ também pode ser usado para a diferenciação de campos vetoriais, obtendo-se dessa maneira a divergência (*div*) e o rotacional (*rot*) de um campo vetorial:

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (\text{B.9})$$

e

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}. \quad (\text{B.10})$$

A interpretação geométrica da $\text{div}\vec{E}$ é muito simples pois o seu próprio nome indica a essência da operação fornecendo as fontes ou sumidouros do campo vetorial em cada ponto do espaço. Por exemplo, um campo que possui divergência nula em todos os pontos do espaço, deve mostrar um campo vetorial onde as linhas de campo não se originam nem terminam em nenhum lugar desse espaço devendo portanto formar anéis (loops) fechados. Por outro lado os campos vetoriais como o eletrostático são conhecidos como irrotacionais ou seja $\text{rot}\vec{E} = 0$. Nestas notas escrevemos os operadores unicamente em coordenadas cartesianas, mas o leitor poderá encontrar as respectivas expressões para a geometria esférica e cilíndrica na literatura.

B.2 Integração de Campos Escalares e Vetoriais

Existem três diferentes tipos de integração a integral de linha e a de superfície, para vetores e a integral de volume para escalares. No nosso caso, a integral de linha do campo elétrico, representa o trabalho por unidade de carga e está relacionada com o conceito de potencial elétrico:

$$W = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V. \quad (\text{B.11})$$

Para as forças como as elétricas e gravitacionais, as integrais de linha resultam serem independentes da trajetória de integração, são ditas por isso forças conservativas. A integral de superfície é utilizada na lei de Gauss na sua forma integral;

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv, \quad (\text{B.12})$$

As integrais de volume de um campo escalar tem uma importância muito grande, pois a sua relação com a integral de superfície e de linha de campos vetoriais (teoremas de Stokes, e de Gauss) nos permitem obter interessantes relações na eletricidade.

Pelo Teorema de Stokes, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A}. \quad (\text{B.13})$$

Pelo teorema de Gauss, pode-se obter a seguinte relação

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv. \quad (\text{B.14})$$

A expressão do teorema de Stokes pode ser obtida em termos do gradiente de V portanto;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \times \nabla V) d\vec{A}. \quad (\text{B.15})$$

Como $\vec{\nabla} \times \nabla V \equiv 0$ portanto no campo elétrico $\text{rot} \vec{E} = 0$. No caso da Lei de Gauss, pode-se escrever o fluxo elétrico em termos do divergente da seguinte maneira;

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \nabla V) dv. \quad (\text{B.16})$$

O que resulta na Equação de Poisson, escrita em função do potencial utilizado o operador laplaciano:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{B.17})$$

APÊNDICE C

Regra de Cramer

Um sistema de três equações lineares cujas incógnitas são, por exemplo, as correntes elétricas de um circuito pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{11}i_1 + a_{12}i_2 + a_{13}i_3 &= k_1 \\ a_{21}i_1 + a_{22}i_2 + a_{23}i_3 &= k_2 \\ a_{31}i_1 + a_{32}i_2 + a_{33}i_3 &= k_3 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

ou na forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

O valor numérico do determinante dos coeficientes Δa , permite obter cada um dos elementos do vetor corrente, através das seguintes operações, ou regra de Cramer:

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (\text{C.3})$$

Portanto,

$$i_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\Delta a}, \quad i_3 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{bmatrix}}{\Delta a}, \quad (\text{C.4})$$

APÊNDICE D

Unidades e Constantes

O SI ou Sistema Internacional de unidades, pode ser resumido em três tabelas simples,

Unidades Fundamentais ou de base: apresentadas na tabela D.1, que por convenção são dimensionalmente independentes. As unidades derivadas, que são formadas pela combinação de unidades de base.

Unidades suplementares: são apenas duas as unidades suplementares: o radiano, unidade de ângulo plano e o esterradiano, unidade de ângulo sólido.

Unidades derivadas: são formadas pela combinação de unidades de base ou outras unidades derivadas, de acordo com as relações algébricas que relacionam as quantidades correspondentes. Na tabela D.2 apresentam-se algumas dessas unidades.

Tabela D.1: Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente Elétrica	Ampère	A
Temperatura	kelvin	K
Quantidade de Matéria	mole	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Tabela D.2: Unidades SI derivadas

Grandeza	Unidade	Símbolo	Equivalência
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}
Força	newton	N	$kg.ms^{-2}$
Pressão	pascal	Pa	$kg.m^{-1}s^{-2}$
Energia, trabalho e calor	joule	J	$kg.m^2s^{-2}$
Potência	watt	W	$kg.m^2.s^{-3}$
Carga Elétrica	coulomb	C	A.s
Potencial elétrico, fem	volt	V	$kg.m^2.A^{-1}.s^{-3}$
Resistência Elétrica	ohm	Ω	$kg.m^2.A^{-2}.s^{-3}$
Condutância Elétrica	siemens	S	$A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-2}$
Capacitância	farad	F	$A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-2}$
Fluxo Magnético	weber	Wb	$kg.m^2.A^{-1}.s^{-2}$
Campo Magnético	tesla	T	$kg.A^{-1}.s^{-2}$
Indutância	henry	H	$kg.m^2.A^{-2}.s^{-2}$

Tabela D.3: Prefixos dos múltiplos e submúltiplos no SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	quilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	ato	a

Tabela D.4: Valores de constantes fundamentais

Constante	Símbolo	Valor	Unidades
Permissividade do vácuo	ϵ_o	$8,854188 \times 10^{-12}$	$F.m^{-1}$
Permeabilidade do vácuo	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$	$N.A^{-2}$
Carga elementar	e	$1,602177 \times 10^{-19}$	C
Massa do elétron	m_e	$9,109390 \times 10^{-31}$	kg
Massa do próton	m_p	$1,672623 \times 10^{-27}$	kg
Massa do neutron	m_n	$1,674929 \times 10^{-27}$	kg
Constante de Avogadro	N_A	$6,022137 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Velocidade da Luz no vácuo	c	$2,997925 \times 10^8$	$m.s^{-1}$

APÊNDICE E

Consumo de Energia Elétrica

Tabela E.1: Fontes e Consumo de Energia elétrica

Fonte	Potência
Termoelétrica Média	250 MW
Termoelétrica de grande Porte	1 GW
Usina Nuclear	1 GW
Itaipu	12GW
Bateria de Automóvel	1kW
Pequeno Gerador Elétrico	1-5 kW
Pilha Elétrica	1 a 100W

Tabela E.2: Potência de eletrodomésticos, (valores de referência)

Aparelho	Potência [W]
Relógio	2
Rádio	10-50
Computador, Televisão, Ventilador	200
Secador de Cabelo	300
Máquina de Lavar	500
Aspirador de pó	600
Boiler	500-700
Refrigerador	600
Ferro Elétrico	500-1000
Forno de Microondas	1000-1500
Ar condicionado	1500
Chuveiro Elétrico	3500-7000
Fogão Elétrico	10000

APÊNDICE F

Bibliografia

F.1 Bibliografia Indicada

1. **Chaves**, Alaor. Física, vol. 2, Eletromagnetismo, Reichmann & Affonso Editores, Rio de Janeiro, RF, 2001.
2. **Halliday**, D., Resnick R. e Walker, J., Eletromagnetismo, 4a. ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ, 1997.
3. **Tipler**, Paul A. Física vol. 2, 4a. ed., LTC Livros Técnicos Científicos, Rio de Janeiro RJ, 2000.
4. **Nussenzweig**, H. Moysés, Curso de Física básica vol. 3, Eletromagnetismo, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, SP, 1999.
5. **Alonso**, M., Finn, E.J., Physics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.
6. **Purcell**, Edward, M., Curso de Física Berkeley volume 2, Eletricidade e Magnetismo, Ed. Edgard Blucher Ltda, 1973.
7. **Fishbane**, P.M, Gasiorowicz, S., Thornton, S.T., Physics for Scientists and Engineers 2nd Ed., Prentice Hall, NJ, USA, 1996.

F.2 Obras de Grande Interesse Histórico

8. **Gilbert**, William. *De Magnete*, Dover Publications Inc. NY, 1958.
9. **Maxwell**, James Clerk. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications Inc., NY, 1954.

F.3 Estudo Avançado

10. **Feynman**, P.R. Leighton, R.B., Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
11. **Jackson**, J.D. *Classical Eletrodynamics*, 2a. edição, John Wiley & Sons, NY, USA, 1975.

F.4 Multimídia

12. IUN/FYDE Introductory Physics Notes. Disponível em: <http://theory.uwinnipeg.ca/physics/>. Acesso em: agosto de 2012.
13. Tatum, J.B., *Physics Topics, Electricity and Magnetism*, Disponível em: <http://www.astro.uvic.ca/~tatum/elmag.html>. Atualizado em: maio de 2012. Acesso em: agosto de 2012.
14. **Glatzmaier**, G. A., Roberts, P. H., A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 91, 63-75 (1995) Disponível em: <http://www.psc.edu.science/glatzmaier.html>. Acesso em: agosto de 2012.
15. **Mundim** K. C., EaD: Laboratório Virtual, Física 3 Eletricidade de Magnetismo, Disponível em: <http://www.ensinoadistancia.pro.br/EaD/>. Atualizado em: Janeiro de 2008. Acesso em: agosto de 2012.



ISBN 85-906555-8-4



IMPRESA
UNIVERSITÁRIA - UFSM